

Czy Bóg stworzył liczby pierwsze?
Hipoteza Riemanna
a racjonalność przyrody

Polska Akademia Nauk
Oddział w Poznaniu

Czy Bóg stworzył liczby pierwsze? Hipoteza Riemanna a racjonalność przyrody

Artykuły opracowane na podstawie referatów wygłoszonych
na sesji „Dwugłos Nauki”
w Poznaniu 29 listopada 2017 roku

Teksty recenzowane pod kierunkiem
prof. dr. hab. inż. Romana Słowińskiego

Poznań 2018

Polska Akademia Nauk, Oddział w Poznaniu
Czy Bóg stworzył liczby pierwsze?
Hipoteza Riemanna a racjonalność przyrody

Publikacja finansowana przez
Polską Akademię Nauk

ISBN 978-83-63305-52-9

© Copyright by Oddział PAN w Poznaniu, Poznań 2018
All rights reserved

Projekt okładki: Mirosława Korbańska
Korekta: Małgorzata Szkudlarska

Polska Akademia Nauk, Oddział w Poznaniu
61-713 Poznań, ul. Wieniawskiego 17/19
tel.: (61) 641 50 03, faks: (61) 641 50 80
e-mail: poznan@pan.pl



Przygotowanie do druku:
Dom Wydawniczy ELIPSA
ul. Inflancka 15/198, 00-189 Warszawa
tel. 22 635 03 01
e-mail: elipsa@elipsa.pl, www.elipsa.pl



Druk i oprawa:
Agencja Wydawniczo-Poligraficzna GIMPO
ul. M. Grzegorzewskiej 8, 02-778 Warszawa
tel. +48 501 076 031
e-mail: gimpo@poligrafia.waw.pl

SPIS TREŚCI

Wprowadzenie

Prof. dr hab. inż. Roman Słowiński – czł. rzecz. PAN,
Prezes Oddziału PAN w Poznaniu 7

Czy świat byłby gorszy, gdyby Hipoteza Riemanna była fałszywa?

Prof. dr hab. Jerzy Kaczorowski, czł. rzecz. PAN..... 11

Czy fizyk udowodni Hipotezę Riemanna?

Dr hab. Marek Wolf, prof. UKSW 57

Dlaczego matematyka pozwala rozumieć i opisywać świat? Refleksja filozoficzna

Prof. dr hab. Roman Murawski..... 85

Czy powinna nas dziwić matematyczność świata?

Ks. dr hab. Jerzy Dadaczyński, prof. UPJPII,..... 103

Noty o autorach 121

WPROWADZENIE

Artykuły opublikowane w tej książce opracowane zostały na podstawie referatów wygłoszonych w czasie sesji naukowej z cyklu Dwugłos Nauki, zatytułowanej „Czy Bóg stworzył liczby pierwsze? Hipoteza Riemanna a racjonalność przyrody”, współorganizowanej przez Oddział Polskiej Akademii Nauk w Poznaniu i Wydział Teologiczny Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza. Sesja odbyła się w siedzibie Oddziału PAN w Poznaniu w dniu 29 listopada 2017 roku.

Sesje naukowe z cyklu Dwugłos Nauki organizowane są w Poznaniu od 1995 roku i tradycyjnie podejmują problematykę o znaczeniu fundamentalnym. W listopadzie 2017 roku wykładowcom i uczestnikom sesji zadaliśmy pytanie: **czy matematyka jest tylko naszym sposobem porządkowania wiedzy o świecie, czy też jest także sposobem jego istnienia?** Punktem wyjścia do tej debaty była dla nas sformułowana w 1859 roku przez niemieckiego matematyka Bernharda Riemanna hipoteza matematyczna nazwana jego nazwiskiem. Pokazuje ona związek między pewną matematyczną funkcją zmiennej zespolonej, zwaną funkcją dzeta, a rozmieszczeniem liczb pierwszych w ciągu liczb naturalnych.

Teoria liczb pierwszych od dawna budzi fascynację naukowców i wielu przypisuje jej obiektywne istnienie, jakby to był byt pierwotny, prawo przyrody niezależne od cywilizacji. Hipoteza Riemanna ucieleśnia zatem tajemniczy związek, jaki zdaje się istnieć między językiem matematyki opisującym świat a matematyczną strukturą samego świata.

Udowodnienie Hipotezy Riemanna jest od 160 lat jednym z najważniejszych otwartych problemów matematyki. Instytut Matematyczny Claya ufundował nagrodę w wysokości miliona dolarów za jej udowodnienie lub obalenie. Hipoteza Riemanna jest ważna ze względu na swoje liczne i głębokie konsekwencje. Jej udowodnienie spowodowałoby przebudowę znacznej części analitycznej teorii liczb, upraszczając znacznie dowody wielu twierdzeń i wzmacniając je w większości wypadków.

Ma ona również konsekwencje dla informatyki, a mówiąc dokładniej dla kryptologii, gdyż duże liczby pierwsze są wykorzystywane do szyfrowania danych w systemach cyberbezpieczeństwa.

Jeśli Hipoteza Riemanna byłaby prawdziwa, to można by mieć pewność, że test pierwszości liczby n można wykonać w czasie wielomianowym, a nie wykładniczo zależnym od wielkości tej liczby.

Hipoteza Riemanna fascynuje także fizyków, gdyż okazuje się, że rozkład nietrywialnych miejsc zerowych funkcji dzeta (a więc wg Hipotezy Riemanna także rozmieszczenie liczb pierwszych w ciągu liczb naturalnych) odpowiada rozkładowi poziomów energetycznych jąder atomowych pierwiastków ciężkich.

W tym kontekście rodzi się pytanie: czy gdyby doszło do udowodnienia Hipotezy Riemanna, to byłby to argument wspierający ogólną matematyczność świata? Jeśli tak, to Stworzenie byłoby racjonalnym projektem, któremu towarzyszy jakaś zasada logiczna, którą matematyka może opisywać.

Zmarły niedawno Stephen Hawking, który piastował na Uniwersytecie Cambridge katedrę należącą niegdyś do Isaaca Newtona, twierdził w swej ostatniej książce napisanej z Leonardeм Młodinowem, zatytułowanej *Wielki projekt*, że jego zdaniem to nie wola Boga, lecz prawa fizyki dostarczają nam prawdziwego wyjaśnienia, jak zaistniał Wszechświat. Nieuchronną konsekwencją tych praw jest – jak twierdził – Wielki Wybuch: „Ponieważ istnieje grawitacja, Wszechświat może i będzie stwarzał się z niczego”.

John C. Lennox, profesor matematyki z Uniwersytetu Oksfordzkiego, w swojej książce *Bóg i Stephen Hawking*, przełożonej w ubiegłym roku na język polski, zgrabnie kontruje pogląd Hawkinga. Wykazuje, że powyższe zdanie jest sprzeczne, gdyż jeśli świat stwarzałby się z niczego, to prawo grawitacji byłoby samo w sobie puste. Z kolei prawo grawitacji nie mogło powołać do istnienia materii. Ponadto, zawarte w zdaniu Hawkinga twierdzenie o Wszechświecie samostwarzającym się dzięki prawu grawitacji jest także wewnętrznie sprzeczne, gdyż „niemożliwe jest z punktu widzenia logiki, by przyczyna powodowała jakiś skutek, jeśliby nie istniała przed nim”; „to tak jakby ktoś chciałby podnieść samego siebie, ciągnąc się za cholewki butów”, pisze Lennox.

To, że prawa przyrody można przedstawiać w formie matematycznej, jest dla wielu wybitnych fizyków bezustannym źródłem zdumienia, wskazującym poza Wszechświat fizyczny. Albert Einstein pisał: „Každy,

kto jest poważnie zaangażowany w wyścig nauki, przekonuje się, że w prawach wszechświata manifestuje się jakiś duch; duch, który znacznie przewyższa ducha człowieczego”.

A Richard Feynman, laureat Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki, wyznaje: „To, że w ogóle istnieją prawa, które możemy sprawdzać, jest swego rodzaju cudem”.

Powie ktoś, że opis matematyczny świata dokonywany przez naukowców jest antropomorficzny, zatem nie jest to logika Absolutu. Może tak być, chociaż, wracając do Riemanna, gdyby, jak mówi Hipoteza, abstrakcyjna funkcja dzeta przystawała do świata, to jakby ktoś prowadził nasze myślenie tak, aby odkrywało świat. Byłby to „cud” drugiego stopnia; bo prawa przyrody nie tylko istnieją, ale nasze myślenie poddaje się tej racjonalności, która je stworzyła.

Do odpowiedzi na pytanie postawione na wstępie przybliżyli nas znakomici Prelegenci, którym wyrażam gorące podziękowanie za niezmiernie interesujące referaty, przetworzone następnie do postaci artykułów zamieszczonych w tej książce. Pragnę także podziękować panu prof. Janowi Węglarzowi i ks. dr. Adamowi Adamskiemu za przewodniczenie poszczególnym częściom sesji i za poprowadzenie dyskusji.

Prof. dr hab. inż. Roman Słowiński
Prezes Oddziału Polskiej Akademii Nauk w Poznaniu

CZY ŚWIAT BYŁBY GORSZY, GDYBY HIPOTEZA RIEMANNA BYŁA FAŁSZYWA?

JERZY KACZOROWSKI

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Niniejszy esej jest nieco rozbudowaną wersją wykładu wygłoszonego w dniu 29 listopada 2017 roku w ramach cyklu „Dwugłos Nauki”, organizowanego przez Polską Akademię Nauk Oddział w Poznaniu we współpracy z Wydziałem Teologicznym UAM. Zgodnie z duchem tych spotkań, odczyt był adresowany do szerokiego grona słuchaczy, wśród których matematycy stanowili zdecydowaną mniejszość. Taka formuła spotkań wymusza odpowiedni styl prezentowania treści, którego nadrzędnym przesłaniem jest komunikatywność. Biorąc to pod uwagę, starałem się ograniczyć do niezbędnego minimum szczegóły techniczne, które mogłyby być mało zrozumiałe dla niespecjalisty. Matematyk, a w szczególności teoretyk liczb, dowie się tutaj niewiele nowego i może czuć pewien niedosyt, a także odnieść wrażenie, że nie wszystkie ważne aspekty spraw związanych z Hipotezą Riemanna zostały przez mnie nakreślone z dostateczną precyzją. Zamiast tego próbowałem nakreślić zasadnicze idee, a także prześledzić historyczne tło omawianych zagadnień. Mam nadzieję, że pozwoli to na głębsze zaznajomienie osób, które nie parają się profesjonalnie matematyką – lecz doceniają jej głębię – z jednym z najbardziej fascynujących, otwartych problemów matematycznych.

PREHISTORIA HIPOTEZY RIEMANNA: EUKLIDES, EULER, GAUSS

Wielkie problemy nauki mają bogatą historię, a ich rozwiązanie otwiera zwykle nowy rozdział w jej rozwoju. Hipoteza Riemanna, której poświęcone są niniejsze rozważania, sięga swoimi korzeniami bardzo głęboko, bo aż do starożytności. Mimo że w chwili obecnej nadal pozostaje nierozstrzygnięta, można śmiało powiedzieć, że prace nad nią już teraz zaowocowały wieloma wartościowymi wynikami, a nawet więcej – nowymi kierunkami badań. Przyczyniły się również do odkrycia nieoczekiwanych związków między – zdawałoby się – odległymi obszarami badań, takimi jak na przykład arytmetyka liczb całkowitych i fizyka kwantowa. Jej udowodnienie lub obalenie miałoby dramatyczne konsekwencje wewnątrz matematyki, w szczególności w teorii liczb.

Przyczynę tak odległej czasowo genezy Hipotezy należy tłumaczyć jej związkami z najbardziej podstawowym pojęciem matematycznym, a mianowicie z pojęciem liczby. Wiadomo, że matematyka bada m.in. liczby, a także wykorzystuje je do opisu innych obiektów. Można powiedzieć, że matematyka bez liczb nie mogłaby istnieć. Najbardziej podstawowym rodzajem liczb są liczby naturalne, to znaczy dodatnie liczby całkowite: $1, 2, 3, \dots$. Pozostałe rodzaje liczb, na przykład liczby wymierne, rzeczywiste czy zespolone, mogą być zdefiniowane (skonstruowane) w sposób jawny przy użyciu liczb naturalnych. Słynny matematyk niemiecki Leopold Kronecker powiedział, że *Bóg stworzył liczby naturalne, wszystko inne jest dziełem człowieka*. Nic więc dziwnego, że liczby były obiektem zainteresowania matematyków od samego początku. Bardzo szybko odkryto, że liczby naturalne większe od 1 dzielą się na dwie kategorie: liczby pierwsze i złożone. Liczby pierwsze, a więc takie, które mają tylko dwa dzielniki naturalne, pełnią rolę swego rodzaju atomów, bowiem każda liczba naturalna większa od 1 jest liczbą pierwszą lub też iloczynem takich liczb, przy czym rozkład ten jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności czynników. Początkowe liczby pierwsze to

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29, 31, \dots$$

Rodzi się tutaj naturalne pytanie: czy powyższy ciąg w pewnym momencie się kończy, czy też może być przedłużany w nieskończoność? Pytamy w istocie o to, czy istnieje największa liczba pierwsza?

Euklides (365 r. p.n.e.–ok. 300 r. p.n.e.), matematyk grecki pochodzący z Aten, przez większość życia działający w Aleksandrii, odpowiedział na nie, dowodząc, że *liczb pierwszych jest nieskończenie wiele*¹. W szczególności wynika stąd, że największej liczby pierwszej nie ma: jakąkolwiek ustalimy granicę, na przykład $N = 10^{10000000000}$, to istnieje liczba pierwsza p większa od N . Warto tutaj zaznaczyć, że w chwili obecnej (2018) nie znamy żadnej tak wielkiej liczby pierwszej i nie jesteśmy w stanie jej znaleźć nawet przy użyciu najpotężniejszych komputerów. Niemniej jednak wiemy, na podstawie twierdzenia Euklidesa, że liczba taka na pewno istnieje. Jest w tym momencie jasne, że twierdzenia Euklidesa nie można udowodnić „rachunkowo”, lecz należy je uzasadnić, przeprowadzając odpowiednie rozumowanie. Nie jest ono specjalnie złożone czy też trudne, ale znaczenie samego twierdzenia jest ogromne. Mówi bowiem ono, że „atomów” – lub inaczej mówiąc elementarnych cegiełek, z których zbudowane się pozostałe liczby naturalne – jest bardzo dużo. Jest więc z czego budować i w związku z tym można oczekiwać, że nie zabraknie budulca do tworzenia nawet najbardziej skomplikowanych konstrukcji matematycznych, zdolnych do opisu bardzo złożonych zjawisk. Nie ma potrzeby podkreślać, że cały dalszy rozwój nauki potwierdził, i do dnia dzisiejszego potwierdza, prawdziwość tego stwierdzenia.

Następne istotne kroki w badaniu liczb pierwszych uczynił Leonhard Euler (1707–1783), matematyk i fizyk szwajcarski, przez większość życia pracujący w Berlinie i Petersburgu. Był pionierem w wielu obszarach obu tych nauk. Euler jest uważany za czołowego matematyka XVIII wieku i jednego z najwybitniejszych w całej historii matematyki.

W 1744 roku Euler udowodnił², że suma odwrotności wszystkich liczb pierwszych jest nieskończona, tzn.:

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty. \quad (1)$$

Zauważmy, że jest to stwierdzenie silniejsze od twierdzenia Euklidesa, gdyby bowiem liczb pierwszych było tylko skończenie wiele, to suma po lewej stronie powyższej równości miałaby skończoną wartość. W istocie

¹ Euklides, *Elementy*. Stwierdzenie 20 w Księdze IX.

² L. Euler, *Variae observationes circa series infinitas*. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9(1744), 160–188. Opera Omnia, Series 1, Volume 14, p. 216–244, Lipsiae et Berolini, 1924.

twierdzenie to mówi więcej. Istnieją przecież szeregi nieskończone o skończonej sumie. Zatem ze wzoru (1) wynika, że składników – a więc liczb pierwszych – musi być „dużo”. Euler potrafił temu ostatniemu stwierdzeniu nadać formę ilościową.

Jak widać, Euler był w stanie dokonać istotnego postępu w badaniu liczb pierwszych, niemniej jednak w pracy³ napisanej w 1747 roku, a opublikowanej w 1751 napisał następujące słowa, z których można odczytać jednocześnie fascynację, jak i bezsilność w zetknięciu z tym problemem.

*Les mathématiciens ont tâché jusqu'ici en vain à découvrir un ordre quelconque dans la progression des nombres premiers, et on a lieu de croire, que c'est un mystère auquel l'esprit humain ne saurait jamais pénétrer. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à jeter les yeux sur les tables des nombres premiers, que quelques personnes se sont donné la peine de continuer au-delà de cent mille: et on s'apercevra d'abord qu'il ne règne aucun ordre ni règle.*⁴

Odkrycie wzoru (1) było wynikiem prac Eulera nad sumowalnością szeregów nieskończonych – był to temat gorących dyskusji między matematykami siedemnastego i osiemnastego stulecia. W roku 1644 matematyk włoski Pietro Mengoli (1626–1686) postawił⁵ problem obliczenia sumy szeregu nieskończonego złożonego z odwrotności kwadratów liczb naturalnych, to znaczy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Problem ten zyskał potem nazwę *problemu bazylejskiego* dzięki Jakobowi Bernoulliemu (1655–1705), słynnemu matematykowi z Bazylei, który w serii prac *Positiones de seriebus infinitis* z 1689 roku sformułował go w sposób ścisły, a następnie – do końca swojego życia – bezskutecznie

³ L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*. Bibliothèque impartiale 3(1751), 10–31. Opera Omnia, Series 1, Volume 2, p. 241–253, Lipsiae et Berolini, 1915.

⁴ Matematycy na próżno starali się odkryć jakiś porządek w ciągu liczb pierwszych, ale mamy prawo przypuszczać, że są pewne tajemnice, których umysł ludzki nigdy nie przeniknie. Aby się o tym przekonać, wystarczy przyrzeć się tabelom liczb pierwszych, które staraniem kilku osób zostały sporządzone w zakresie do ponad stu tysięcy: można od razu zauważyć, że nie panuje tu żaden porządek czy reguła.

⁵ P. Mengoli, *Novae quadrature arithmeticae, seu de additione fractionum*. Typografia Iacobi Montij, Bononiae, 1650

próbował rozwiązać. Problemem tym interesowało się wielu znanych matematyków tamtego okresu, między innymi Wallis, Leibniz, Stirling, de Moivre, Goldbach oraz Daniel Bernoulli. Stosunkowo łatwo jest uzasadnić stwierdzenie, że szereg powyższy jest zbieżny. Nietrudno zauważyć, że szereg zbiega do swojej sumy – oznaczmy ją przez $\zeta(2)$ – stosunkowo wolno. Mianowicie dla dowolnej liczby naturalnej N , suma pierwszych N wyrazów, to znaczy

$$1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N^2},$$

różni się od $\zeta(2)$ o mniej niż $1/N$. Obliczając sumy częściowe, można rzecz jasna uzyskać przybliżone wartości $\zeta(2)$, ale z przytoczonego przed chwilą oszacowania błędu przybliżenia widać, że na tej drodze nie można zejść daleko. Na przykład obliczenie wartości $\zeta(2) = 1,644934\dots$ z dokładnością do szóstego miejsca po przecinku wymaga zsumowania pierwszego miliona wyrazów szeregu.

Euler poświęcił badaniu problemu bazylejskiego kilka prac, a w 1735 roku – po niemal 100 latach od jego sformułowania – w końcu go rozstrzygnął⁶, dowodząc, że

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Metoda dowodu Eulera nie od razu została uznana za w pełni poprawną. Wynikało to z faktu, że Euler używał argumentów, które w tamtych czasach były zbyt nowatorskie, a znalazły swoje pełne uzasadnienie dopiero w teorii Hadamarda funkcji skończonego rzędu, która powstała niemal 150 lat później. Zauważmy, że metoda Eulera pozwoliła mu na obliczenie wartości $\zeta(2n)$ dla wszystkich liczb naturalnych n :

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n},$$

gdzie B_n oznaczają tak zwane liczby Bernoulliego. Może warto tutaj na marginesie zauważyć, że wzory te legły u podstaw powstałej w dwu-

⁶ L. Euler, *De summis serierum reciprocarum*. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7(1740), 123–134. Opera Omnia, Series 1, Volume 14, p. 73–86, Lipsiae et Berolini, 1924.

dziestym wieku teorii tak zwanych p -adycznych funkcji dzeta, aktywnie rozwijanej dziedziny współczesnych badań⁷.

Szereg występujący w problemie bazylejskim jest szczególnym przypadkiem (dla $s = 2$) sumy postaci

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \quad (2)$$

Pojawiła się ona (dla wymiernych wartości zmiennej s) we wspomnianej wcześniej serii prac *Positiones de seriebus infinitis* Jacoba Bernoulliego. Euler dokonał istotnego postępu w jej badaniu, publikując w 1744 roku pracę *Variae observationes circa series infinitas*⁸. Natomiast w rozprawie napisanej w 1749, a opublikowanej w 1768 roku⁹ wykazał, że dla $s > 1$ zachodzi następująca równość, znana obecnie pod nazwą *iloczynu* lub *tożsamości Eulera*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \quad (3)$$

Iloczyn po prawej stronie jest iloczynem po wszystkich liczbach pierwszych, a więc jest równy

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{7^s}\right)^{-1} \dots$$

Ciekawą rzeczą jest, że we wspomnianym dziele Euler uzasadnia następującą równość, w której $n > 1$ jest liczbą naturalną:

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - \dots}{1 - 2^{-n} + 3^{-n} - \dots} = -\frac{(n-1)!(2^n - 1) \cos \frac{\pi n}{2}}{(2^{n-1} - 1)\pi^n}. \quad (4)$$

Jest ona o tyle ciekawa, że formalnie rzecz biorąc, nie ma sensu. Po jej lewej stronie w liczniku stoi bowiem szereg, który jest rozbieżny. Niemniej

⁷ Z podstawowymi pojęciami tej teorii można się zapoznać w monografii: N. Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 58. Springer-Verlag, New York, 1984. xii+150 pp.

⁸ Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9 (1744), 160–188. In Opera Omnia, Series 1, Volume 14, p. 216–244, Lipsiae et Berolini, 1924.

⁹ L. Euler, *Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques*, Mémoires de l'académie des sciences de Berlin 17(1768), 83–106. Opera Omnia, Series 1, Volume 15, p. 70–90, Lipsiae et Berolini, 1927.

jednak Euler potrafił nadać temu wyrażeniu ściśle określony sens, po raz kolejny wyprzedzając swoją epokę. Tym razem – stosując współczesną terminologię – antycypując powstanie teorii sumowalności. W istocie uzasadniając istnienie sumy szeregu nieskończonego, Euler korzystał z metody, którą obecnie nazywamy *sumowalnością w sensie Abela*; wrócimy do tego zagadnienia przy omawianiu równania funkcyjnego funkcji dzeta Riemanna.

Dalszych, doniosłych odkryć dotyczących liczb pierwszych dokonał Carl Friedrich Gauss (1777–1855), niemiecki matematyk, fizyk i astronom. Uważany jest za jednego z największych matematyków, przez siebie współczesnych określany był mianem „księcia matematyków” (*princeps mathematicorum*). W latach 1792–1793, jako kilkunastoletni młodzieniec, przeprowadził obliczenia numeryczne, próbując odkryć regularności w rozmieszczeniu liczb pierwszych mniejszych od trzech milionów na podstawie sporządzonych przez siebie tablic¹⁰. Jest jasne, że jedyną parzystą liczbą pierwszą jest liczba 2, ale poza tym liczby pierwsze pojawiają się w ciągu liczb naturalnych w sposób dość przypadkowy. W szczególności nie ma prostego wzoru na n -tą liczbę pierwszą. Gauss zauważył, że mimo pozornej chaotyczności w ich rozmieszczeniu, istnieją prawa, którym one podlegają. W szczególności zauważył, że prawdopodobieństwo tego, żeby losowo wybrana liczba naturalna była liczbą pierwszą jest w przybliżeniu równe odwrotności logarytmu naturalnego z tej liczby. Oznaczając przez $\mathbb{P}$ zbiór liczb pierwszych, a przez P funkcję prawdopodobieństwa (miarę probabilistyczną), możemy to stwierdzenie zapisać symbolicznie w następujący sposób¹¹:

$$P(n \in \mathbb{P}) \cong \frac{1}{\log n}. \quad (5)$$

Przy badaniu liczb pierwszych wygodnie jest posługiwać się funkcją liczącą $\pi(x)$, która dla liczby dodatniej x przyjmuje wartość równą liczbie

¹⁰ Gauss nigdy nie opublikował swoich tablic. Wspomina o nich w cytowanym w dalszej części tego artykułu liście do Enckego. Znajdują się one w wydanych po śmierci Gaussa pracach zebranych, por. C.F. Gauss, *Tafel der Frequenz der Primzahlen*. Werke, II, 436–442, Göttingen, 1872.

¹¹ Warto tu podkreślić, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x , symbol $\log x$ oznacza logarytm naturalny (a nie dziesiętny) liczby x . Oznaczenie to będzie konsekwentnie stosowane w całej niniejszej pracy.

liczb pierwszych p mniejszych lub równych x :

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

Gauss zauważył, że funkcję $\pi(x)$ cechuje zaskakująca regularność. Dla „dużych” wartości argumentu x przyjmuje ona wartość równą w przybliżeniu sumie odwrotności logarytmów kolejnych liczb naturalnych z zakresu od 1 do x , tzn.

$$\pi(x) \sim \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \dots + \frac{1}{\log N}, \quad (6)$$

gdzie $N = [x]$ oznacza część całkowitą liczby x , to znaczy największą liczbę naturalną mniejszą lub równą x . Występujący w powyższym wzorze symbol „ $\sim$ ” oznacza tak zwaną asymptotyczną równość. Ogólnie, dwie wielkości $f(x)$ oraz $g(x)$, zależne od parametru rzeczywistego x i przyjmujące wartości niezerowe, nazywamy *równymi asymptotycznie*, gdy ich stosunek $f(x)/g(x)$ dąży do 1 przy x dążącym do nieskończoności.

Suma po prawej stronie wzoru (6) rośnie do nieskończoności tak, jak $x/\log x$, a więc

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad (7)$$

lub równoważnie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1. \quad (8)$$

Z grubsza wszystkie powyższe wzory stwierdzają, że liczb pierwszych mniejszych lub równych x jest w przybliżeniu $x/\log x$. Ponieważ liczb naturalnych $n \leq x$ jest dokładnie tyle, ile wynosi część całkowita z x , a więc w przybliżeniu x , prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana liczba naturalna $n \leq x$ będzie liczbą pierwszą, jest równe

$$\frac{\pi(x)}{[x]} \sim \frac{1}{\log x},$$

co jest całkowicie zgodne z (5).

Należy przy tym podkreślić, że odkrycia Gaussa miały charakter czysto fenomenologiczny i nie były twierdzeniami matematycznymi w ścisłym rozumieniu tego słowa. Były to raczej przypuszczenia oparte na

obserwacjach i to – dodajmy od razu – dokonanych w stosunkowo małym zakresie. Ponieważ jednak w tamtych czasach nie istniały komputery i obliczenia te należało wykonać ręcznie, wymagało to sporej cierpliwości. Ale istota pracy Gaussa nie polegała na przeprowadzeniu rachunków i sporządzeniu tablicy liczb pierwszych mniejszych od 3 000 000, lecz na interpretacji uzyskanego materiału empirycznego. W szczególności wzór (7) zyskał status hipotezy, zwanej *hipotezą o liczbach pierwszych*. Zainspirowała ona wielu wybitnych matematyków, była jedną z motywacji przyszłej pracy Riemanna oraz doprowadziła do sformułowania słynnej Hipotezy Riemanna, o czym powiemy w dalszej części tego opracowania.

Liczyby pierwsze fascynowały Gaussa przez całe życie. Nie udało mu się wprawdzie udowodnić w sposób ścisły swoich przypuszczeń na ich temat, ale – już w wieku dojrzałym – nadał im bardziej precyzyjną postać. W liście do znanego astronoma Enckego¹² napisanym w roku 1849 Gauss¹³ zauważył, że sumę stojącą po prawej stronie wzoru (6) można z bardzo dobrym przybliżeniem zastąpić przez pewną całkę, zwaną *logarytmem całkowym*

$$\text{li}(x) = \int_0^x \frac{du}{\log u} \quad (x > 1).$$

Uważny Czytelnik zwróci uwagę w tym momencie na pewną osobliwość występującą w powyższej definicji, a mianowicie na nieokreśloność funkcji podcałkowej dla $u = 1$ (zero w mianowniku). Śpieszę uspokoić, że jest to problem, z którym można sobie łatwo poradzić, rozumiejąc odpowiednio całkę, ale nie będziemy się nad tym dłużej zatrzymywać. Można udowodnić, że przy x dążącym do nieskończoności

$$\text{li}(x) = \sum_{n=2}^N \frac{1}{\log n} + c_0 + O\left(\frac{1}{x \log x}\right),$$

gdzie $c_0 = 0.207047 \dots$ jest pewną stałą numeryczną.

¹² Johann Franz Encke (1791–1865) – astronom niemiecki. Jego imię nosi jedna z komet (*kometę Enckego*), odkrył tzw. *przerwę Enckego* w zewnętrznym pierścieniu Saturna, określił wartość paralaksy słonecznej, a także opracował metody obliczania orbit komet krótkookresowych i planetoid oraz orbit gwiazd podwójnych.

¹³ Angielskie tłumaczenie listu stanowi załącznik do pracy L.J. Goldsteina, *A history of the prime number theorem*. American Mathematical Monthly, 80(6)(1973), 599–615.

Powyższy wzór jest przykładem tak zwanej formuły asymptotycznej, a więc wzoru, który pozwala na przybliżenie jakiejś wielkości przez prostsze wyrażenie zwane *członem głównym*. W naszym konkretnym przypadku wielkością przybliżaną jest $\text{li}(x)$, a członem głównym jest suma

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{\log n} + c_0.$$

Ostatni składnik to tak zwany *człon resztowy*. Użyty tu symbol

$$O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

oznacza, że przy zastąpieniu $\text{li}(x)$ przybliżeniem, które daje człon główny, popełniamy błąd, którego wartość bezwzględna nie przekracza

$$C \frac{1}{x \log x}$$

dla pewnej stałej dodatniej C oraz wszystkich liczb $x \geq x_0$. Ogólnie, dla dowolnych wartości $f(x)$ oraz $g(x) > 0$, zależnych od parametru rzeczywistego $x \geq x_0$, zapis

$$f(x) = O(g(x))$$

oznacza, że istnieje stała dodatnia C taka, że dla wszystkich $x \geq x_0$ zachodzi nierówność

$$|f(x)| \leq Cg(x).$$

Z formułami asymptotycznymi będziemy mieć wielokrotnie do czynienia w dalszej części tego opracowania.

Zauważmy, że przy x dążącym do nieskończoności oraz przy dowolnym ustalonym k będącym liczbą naturalną mamy

$$\text{li}(x) = \frac{x}{\log x} + 1! \frac{x}{\log^2 x} + 2! \frac{x}{\log^3 x} \dots + (k-1)! \frac{x}{\log^k x} + O\left(\frac{x}{\log^{k+1} x}\right), \quad (9)$$

a więc $x/\log x$ jest pierwszym przybliżeniem logarytmu całkowego. Nie dziwi zatem fakt, iż $\text{li}(x)$ dokładniej przybliża $\pi(x)$ niż $x/\log x$. W istocie formuły (7) oraz

$$\pi(x) \sim \text{li}(x) \quad (10)$$

są równoważne. Różnica między nimi polega na jakości przybliżenia.

Korzystając z komputera, można bez trudu sprawdzić, że formuła ta poprawnie opisuje zachowanie się funkcji liczącej liczby pierwsze także dla wartości zmiennej x znacznie wykraczających poza przedział badany przez Gaussa. Pokazuje to następujące zestawienie:

x	$\pi(x)$	$\text{li}(x)$	$\text{li}(x) - \pi(x)$
10	4	6.16	2.16
10^2	25	30.1	5.1
10^3	168	177.6	9.6
10^4	1229	1246.1	17.1
10^5	9592	9629.8	37.8
10^6	78498	78627.5	129.5
10^7	664579	664918.4	339.4
10^8	5761455	5762209.4	754.4
10^9	50847534	50849235.0	1700.9

Opierając się na powyższych danych, można poczynić śmielsze przypuszczenia od tych, które zaproponował Gauss. Widać na przykład, że dla wartości podanych w tabeli mamy zawsze $\pi(x) < \text{li}(x)$. Gdybyśmy jednak dali się ponieść fantazji i przyjęli ten fakt eksperymentalny jako roboczą hipotezę, ponieśliśmyby spektakularną klęskę. J.E. Littlewood¹⁴ wykazał¹⁵, że różnica

$$\pi(x) - \text{li}(x)$$

zmienia znak nieskończenie wiele razy przy x dążącym do nieskończoności. Tak więc logarytm całkowity przybliża wartość $\pi(x)$ nieskończenie wiele razy z nadmiarem i nieskończenie wiele razy z niedomiarem. Co więcej, odchylenia te przekraczają co do wartości bezwzględnej wartość

$$A \frac{\sqrt{x} \log \log \log x}{\log x} \quad (11)$$

dla pewnej liczby dodatniej A . Ciekawe jest, że w chwili obecnej (2018) nie znamy żadnej wartości x_0 , dla której $\pi(x_0) > \text{li}(x_0)$. Przypuszcza się, że najmniejsza taka wartość jest bardzo duża i znajduje się w okolicach

¹⁴ John Edensor Littlewood (1885–1977) – matematyk angielski.

¹⁵ J.E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers*. C.R. Acad. Sci. Paris 158(1914), 1869–1872.

10^{316} , a więc daleko poza zasięgiem możliwości istniejących komputerów. Z ostatnich uwag można wysnuć wniosek, że eksperymenty numeryczne mogą być użyteczne przy badaniu liczb pierwszych, ale nie należy im bezkrytycznie ufać.

Warto w tym momencie wspomnieć o dwóch pracach¹⁶ francuskiego matematyka Legendre'a¹⁷, w których pojawiły się w formie przypuszczeń stwierdzenia bliskie hipotezie o liczbach pierwszych. W pierwszej z nich Legendre wysunął hipotezę, że $\pi(x)$ jest w przybliżeniu równe

$$\frac{x}{A \log x + B},$$

gdzie A i B są pewnymi stałymi. W drugiej pracy przypuszczenie to zostało zmodyfikowane poprzez zastąpienie powyższego przybliżenia przez

$$\frac{x}{\log x + A(x)},$$

gdzie $A(x)$ jest funkcją parametru x dążącą do 1.08366 przy x dążącym do nieskończoności. Jakkolwiek Gauss był znacznie bliższy prawdy niż Legendre, prace tego ostatniego są godne uwagi ze względu na to, że ukazały się drukiem i w związku z tym od razu weszły w obieg literatury naukowej. We wspomnianym liście do Enckego, Gauss poświęca sporo miejsca porównaniu swoich odkryć z pracami Legendre'a.

MEMORIAŁ RIEMANNA

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) to jeden z najwybitniejszych matematyków wszech czasów. Oprócz matematyki zajmował się również fizyką, zarówno teoretyczną, jak i eksperymentalną, oraz filozofią przyrody. Był profesorem Uniwersytetu w Getyndze, członkiem korespondentem Berlińskiej Akademii Nauk (1859) i Royal Society (1866).

¹⁶ A.-M. Legendre, *Essai sur la théorie des Nombres*, 1st ed. Paris 1798, p. 19; *Essai sur la Théorie des Nombres*, 2nd ed., Paris 1808, p. 394.

¹⁷ Adrien-Marie Legendre (1752–1833) – członek Francuskiej Akademii Nauk, autor prac ze statystyki, teorii liczb, algebry, analizy matematycznej i geodezji.

Żył zaledwie 40 lat, a jego dorobek publikacyjny jest ilościowo dość skromny i mieści się w jednym tomie dzieł zebranych¹⁸. Natomiast jakość prac Riemanna jest imponująca. Każda z nich wniosła istotny wkład w rozwój działu matematyki, którego dotyczyła. Tylko jedna z nich poświęcona jest problemom teorii liczb, a mianowicie liczbom pierwszym. Liczy zaledwie osiem stron, ale treści w niej zawarte wyryły trwałe piętno na rozwoju całej matematyki, zmieniając bieg jej historii. Głównym obiektem badań w Memoriale Riemanna¹⁹ są analityczne własności funkcji $\zeta(s)$, zwanej obecnie *funkcją dzeta Riemanna*, rozważanej w pełnej ogólności, to znaczy jako funkcja zmiennej zespolonej. Jednak głównym celem pracy było zbadanie rozmieszczenia liczb pierwszych; funkcja dzeta była tylko środkiem do tego. Jak widzieliśmy wcześniej $\zeta(s)$, pojawiła się już w pracach Jacoba Bernoulliego i Leonarda Eulera, ale rozważana była wyłącznie jak funkcja argumentu rzeczywistego, co w drastyczny sposób ograniczało zakres możliwych zastosowań. Przejście do dziedziny zespolonej otworzyło nowe perspektywy. Punktem wyjścia pracy Riemanna jest definicja

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

formalnie tożsama z (2) wraz z tożsamością Eulera (3):

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

z jedną, ale zasadniczą różnicą: u Riemanna s oznacza dowolną liczbę zespoloną o części rzeczywistej większej od 1.

Warto teraz przyjąć pewną konwencję dotyczącą zapisu liczb zespolonych, wprowadzoną zresztą przez Riemanna i od tego czasu powszechnie stosowaną w analitycznej teorii liczb. Mianowicie od tego momentu liczby zespolone będziemy zapisywać w postaci

$$s = \sigma + it,$$

¹⁸ B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*. Nach der Ausgabe von Heinrich Weber und Richard Dedekind neu herausgegeben von Raghavan Narasimhan. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1862; Springer-Verlag, Berlin (1990).

¹⁹ B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859, 671–680.

gdzie σ i t są liczbami rzeczywistymi (zwanymi odpowiednio częścią rzeczywistą i częścią urojoną liczby s). Równanie $\sigma > 1$ określa półpłaszczyznę (otwartą) składającą się ze wszystkich liczb zespolonych o części rzeczywistej większej od 1. Jest to tak zwana półpłaszczyzna zbieżności bezwzględnej funkcji dzeta. W tym obszarze $\zeta(s)$ jest zdefiniowana jako suma dobrze zbieżnego szeregu i w związku z tym stosunkowo łatwo tam jest badać jej własności. Również iloczyn Eulera jest w tej półpłaszczyźnie zbieżny bezwzględnie. W obu przypadkach zbieżność jest niemal jednostajna i zgodnie z ogólną teorią każde z wyrażeń (tzn. zarówno szereg, jak i iloczyn) definiują funkcję holomorficzną, oczywiście w obu przypadkach tę samą. W szczególności tożsamość Eulera (3) zachodzi dla wszystkich $\sigma > 1$.

Dla pozostałych liczb zespolonych s funkcję $\zeta(s)$ definiujemy poprzez przedłużenie analityczne. Okazuje się przy tym, jak wykazał Riemann, że $\zeta(s)$ jest funkcją holomorficzną dla wszystkich wartości zespolonych s , z wyjątkiem punktu $s = 1$, gdzie ma tak zwany biegun pojedynczy (z residuum równym 1). Czytelnik, dla którego terminy, które się tu pojawiły, brzmią obco i niezrozumiale, może je rozumieć jako synonim wyrażenia „funkcja o bardzo regularnych własnościach”. Nie znaczy to wcale, że poza półpłaszczyzną $\sigma > 1$ własności funkcji dzeta łatwo poddają się badaniu. Niektóre z nich nadal opierają się wysiłkom matematyków, na czele ze słynną Hipotezą Riemanna, o której będzie mowa obszerniej za chwilę. Jest rzeczą oczywistą, że Riemann wiedział znacznie więcej na temat funkcji dzeta od tego, co umieścił w swojej pracy. Dowody w niej zawarte są zaledwie z grubsza naszkicowane lub też zupełnie pominięte. Zostały one w znakomitej większości uzupełnione staraniem innych matematyków, jednak już po śmierci Riemanna. Dzisiaj na temat funkcji dzeta wiemy bardzo dużo, ale – dodajmy od razu – nie tyle, ile byśmy chcieli. Jej własnościom poświęconych jest kilka klasycznych monografii²⁰ oraz olbrzymia i trudna do oszacowania liczba prac specjalistycznych.

²⁰ Por. np. E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*. 2nd ed. revised by D.R. Heath-Brown, New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1986; H.M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Pure and Applied Mathematics 58, New York-London: Academic Press, 1974; A. Ivić, *The Riemann zeta function*. New York: Wiley-Interscience, 1985; S.J. Patterson, *An introduction to the theory of the Riemann zeta-function*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 14, Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

Memoriał Riemanna rozpoczął, trwający zresztą do dnia dzisiejszego, okres systematycznego badania analitycznych własności funkcji dzeta oraz jej arytmetycznych zastosowań. Można przyjąć, że wraz z pojawieniem się pracy Riemanna została stworzona nowa dziedzina badań zwana *analityczną teorią liczb*. Samego Riemanna należy uznać za jej prekursora, chociaż, jak widzieliśmy wcześniej, praca Riemanna z pewnością była inspirowana o ponad wiek wcześniejszymi odkryciami Eulera.

Oprócz ustalenia przedłużenia analitycznego na całą płaszczyznę zespoloną z usuniętym punktem $s = 1$, Riemann wykazał, że funkcja $\zeta(s)$ spełnia następujące równanie funkcyjne

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s), \quad (12)$$

gdzie $\Gamma(s)$ oznacza tak zwaną funkcję gamma Eulera. Jest to jedna z najważniejszych funkcji nieelementarnych, której definicję pomijam, aktórej własności są dość dobrze poznane. Wygodnie jest wprowadzić następującą funkcję zmiennej zespolonej s

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s). \quad (13)$$

Ze znanych już nam własności funkcji dzeta wnosimy, że jest to funkcja całkowita (holomorficzna na całej płaszczyźnie zespolonej), a wzór (12) można zapisać w następujący elegancki sposób

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Równanie funkcyjne mówi nam, że własności funkcji dzeta w półpłaszczyźnie $\sigma < 0$ można odczytać z własności w półpłaszczyźnie $\sigma > 1$, a więc stosunkowo łatwo. Pozostaje pas pionowy

$$0 \leq \sigma \leq 1,$$

zwany *pasem krytycznym*. Zasadnicza część teorii funkcji dzeta dotyczy właśnie jej własności w pasie krytycznym, a w istocie (ze względu na równanie funkcyjne) w prawej połowie tegoż pasa: $1/2 \leq \sigma \leq 1$. Szczególne miejsce w teorii zajmuje tak zwana *prosta krytyczna* $\sigma = 1/2$, będąca osią symetrii pasa krytycznego.

Ponieważ, jak już powiedziano, funkcja dzeta jest dobrze określona dla wszystkich liczb zespolonych $s \neq 1$, wyrażenia postaci $\zeta(1-n)$ mają ściśle określony sens dla wszystkich liczb naturalnych n . Jest to zasadnicza

różnica (i postęp) w porównaniu z sytuacją, z którą musiał zmagać się Euler. Zauważmy, że szereg

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - \dots$$

występujący w liczniku po lewej stronie wzoru (4) to nic innego jak

$$(2^{n-1} - 1)\zeta(1 - n).$$

Likwiduje to „dziwność” wzoru Eulera, a stosowaną przez niego metodę sumacyjną Abela zastępuje przedłużeniem analitycznym. Analizując w ten sposób wzór (4), dochodzi się do wniosku, że jest on szczególnym przypadkiem równania funkcyjnego (12).

Każdą liczbę zespoloną ω , dla której $\zeta(\omega) = 0$ nazywamy *zerem* funkcji dzeta Riemanna. Bezpośrednio z tożsamości Eulera (3) widać, że $\zeta(s) \neq 0$ dla $\sigma > 1$, a więc w tej półpłaszczyźnie nie ma żadnych zer. Z równania funkcyjnego (12) oraz ze znanych własności funkcji gamma Eulera wynika, że

$$\zeta(-2n) = 0 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Zatem ujemne parzyste liczby całkowite są zerami funkcji dzeta; są to tak zwane *zera trywialne*. Oprócz nich $\zeta(s)$ posiada nieskończenie wiele zer leżących w pasie krytycznym

$$\rho = \beta + i\gamma \quad (0 \leq \beta \leq 1),$$

zwanych *zera mi nietrywialnymi*, które odgrywają pierwszoplanową rolę w całej teorii.

Warto na chwilę zatrzymać się w tym miejscu i wyjaśnić, dlaczego tak jest. Otóż z ogólnej teorii funkcji zmiennej zespolonej²¹ wynika, że dla dowolnej liczby zespolonej s zachodzi następująca równość

$$\xi(s) = \frac{1}{2} e^{As} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho} \right) e^{\frac{s}{\rho}},$$

gdzie A jest pewną stałą²², natomiast ρ przebiega wszystkie nietrywialne zera funkcji $\zeta(s)$. Widać stąd, że położenie zer w zupełności determinuje zachowanie się funkcji dzeta. Z drugiej strony funkcję dzeta możemy

²¹ Chodzi tu o teorię Hadamarda funkcji całkowitych skończonego rzędu.

²² Można wykazać, że $A = \log 2 + \frac{1}{2} \log \pi - 1 - \frac{1}{2} \gamma$, gdzie $\gamma = 0.577215664 \dots$ jest tak zwaną stałą Eulera.

przedstawić w postaci iloczynu Eulera (3). Można więc powtórzyć powyższe stwierdzenie o roli zer w odniesieniu do liczb pierwszych: położenie liczb pierwszych w zupełności determinuje zachowanie się funkcji dzeta. Mamy więc oczywistą dualność między zerami funkcji dzeta a liczbami pierwszymi, co powoduje, że w pewnym sensie badanie tych obiektów jest równoważne. Zera są obiektami znacznie bardziej enigmatycznymi niż liczby pierwsze – już samo zagadnienie ich istnienia wymaga dowodu – niemniej jednak, dość paradoksalnie, są w wielu aspektach łatwiejsze do zbadania. Wynika to z faktu, że przy ich badaniu mamy do dyspozycji bogaty arsenał środków analizy zespolonej. Nieprzypadkowo memoriał Riemanna pojawił się w okresie rozkwitu teorii funkcji zmiennej zespolonej. Na przestrzeni ponad stu lat, które dzielą badanie Eulera problemu bazylejskiego i pracę Riemanna, matematycy stworzyli nowe potężne narzędzie, które pozwoliło na rozwój idei, obecnych już w pracach genialnego Szwajcara. Pojawienie się takiej możliwości zapewne leżało u podstaw zainteresowania się Riemanna liczbami pierwszymi. Była to jego główna motywacja, której zresztą dał wyraz w tytule swojej pracy, który w tłumaczeniu brzmi: *O liczbie liczb pierwszych poniżej danej granicy*. Jednoznacznie więc wskazuje on funkcję liczącą liczby pierwsze $\pi(x)$ jako główny przedmiot badań.

Z równania funkcyjnego (12) wynika, że zera nietrywialne leżą symetrycznie względem prostej rzeczywistej (zasada odbicia Schwarza) oraz prostej krytycznej. Inaczej mówiąc, jeśli $\rho = \beta + i\gamma$ jest zerem nietrywialnym, to również liczby $\beta - i\gamma$, $(1 - \beta) + i\gamma$ oraz $(1 - \beta) - i\gamma$ są zerami nietrywialnymi. Z ogólnej teorii funkcji zmiennej zespolonej wynika, że w każdym prostokącie o wierzchołkach $0, 1, 1 + iT$ oraz iT , gdzie T oznacza dowolną dodatnią liczbę rzeczywistą, liczba zer jest skończona; oznaczmy ją przez $N(T)$. Ponieważ zer jest nieskończenie wiele, więc wielkość ta rośnie do nieskończoności wraz z T dążącym do nieskończoności. Ale jak szybko? Riemann podał następującą formułę asymptotyczną²³

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + O(\log T). \quad (14)$$

Jak powiedziano wcześniej, główna motywacja pracy Riemanna to badanie funkcji $\pi(x)$ metodami analitycznymi. Wynikiem tych dociekań

²³ Ścisły jej dowód przedstawił von Mangoldt w 1905 roku w pracy *Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\xi(t)$* . Math. Ann. 60(1905), 1–19.

była następująca formuła w sposób jawny łącząca liczby pierwsze i nietrywialne zera funkcji dzeta

$$\begin{aligned} \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \dots \\ = \operatorname{li}(x) - \sum_p \operatorname{li}(x^{1/p}) - \log 2 + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\log t}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że lewa strona ma charakter czysto arytmetyczny. Występująca tu funkcja „liczy” liczby pierwsze z odpowiednimi wagami. Dokładniej, liczby pierwsze z zakresu $\sqrt{x} < p \leq x$ liczone są z wagą 1, liczby pierwsze z zakresu $x^{1/3} < p \leq \sqrt{x}$ z wagą 3/2 i tak dalej. Prawa strona ma charakter wybitnie analityczny, w istocie występujące tu składniki związane są z osobliwością funkcji dzeta w punkcie $s = 1$ oraz z jej zerami, zarówno trywialnymi, jak i nietrywialnymi. Wkład zer nietrywialnych jest widoczny *explicite* w postaci sumy, natomiast wkład zer trywialnych ukryty jest w całce występującej po prawej stronie formuły. Chwila zastanowienia prowadzi do następującej idei. Stosunkowo łatwo jest wykazać, że po lewej stronie największym składnikiem jest $\pi(x)$. Trudniejsza sprawa jest ze stroną prawą. Riemann – słusznie, jak się później okazało – przypuszczał, że jest to $\operatorname{li}(x)$. Ta obserwacja prowadzi do wniosku, że $\pi(x) \sim \operatorname{li}(x)$, to znaczy do dowodu hipotezy o liczbach pierwszych. Można wykazać, że do dowodu tej ostatniej wystarczy informacja, iż $\beta < 1$ dla dowolnego nietrywialnego zera funkcji dzeta Riemanna. Staje się więc jasne, że informacja o położeniu nietrywialnych zer wewnątrz pasa krytycznego ma podstawowe znaczenie w teorii liczb pierwszych. Wiedząc o występujących symetriach, Riemann wysunął następujące śmiałe przypuszczenie, znane obecnie pod nazwą *Hipoteza Riemanna*:

Wszystkie nietrywialne zera funkcji dzeta leżą na prostej krytycznej:

$$\rho = \frac{1}{2} + i\gamma.$$

W ciągu ponad 150 lat, które upłynęły od jej postawienia, matematycy zdali sobie sprawę z doniosłych konsekwencji, które ona implikuje. W chwili obecnej Hipoteza Riemanna uważana jest – zupełnie słusznie – za najważniejszy otwarty problem matematyczny. Jest to jeden z tak zwanych *Problemów Milenijnych*, siedmiu zagadnień ogłoszonych przez Instytut Matematyczny Claya w 2000 roku; za rozwiązanie każdego z nich wyznaczono milion dolarów nagrody.

TWIERDZENIE O LICZBACH PIERWSZYCH

Hipotezę o liczbach pierwszych (6) – (8) udowodnili (niezależnie od siebie) Charles-Jean de la Vallée Poussin²⁴ oraz Jacques Hadamard²⁵ w roku 1896, a więc niecałe czterdzieści lat po opublikowaniu pracy Riemanna²⁶. Od tej pory wzory te noszą nazwę *Twierdzenia o liczbach pierwszych*. W istocie wypełnili oni dokładnie program naszkicowany przez Riemanna, otrzymując twierdzenie o liczbach pierwszych jako wniosek z faktu, że części rzeczywiste nietrywialnych zer są mniejsze od 1, inaczej mówiąc, że

$$\zeta(1 + it) \neq 0 \quad (-\infty < t < \infty).$$

De la Vallée Poussin dodatkowo wyznaczył obszar leżący wewnątrz pasa krytycznego i zawierający prostą pionową $s = 1 + it$, który jest wolny od zer funkcji dzeta. W konsekwencji wykazał, że istnieje stała dodatnia c_0 taka, że

$$\pi(x) = \text{li}(x) + O(x \exp(-c_0 \sqrt{\log x})), \quad (15)$$

co jest nieco silniejszą wersją wzoru (10). Udowodnienie Twierdzenia o liczbach pierwszych było ogromnym osiągnięciem, które na trwałe wpisało się do kanonu największych dokonań matematyki.

Warto tutaj nadmienić, że przez długie lata uważano, że Twierdzenia o liczbach pierwszych nie da się udowodnić bez użycia środków analizy zespolonej (lub jej równoważnych). Dopiero w 1949 roku Atle Selberg^{27,28} i P. Erdős^{29,30} znaleźli całkowicie elementarny dowód, to znaczy dowód niewymagający użycia zaawansowanych pojęć analizy matematycznej.

²⁴ Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866–1962) – matematyk belgijski.

²⁵ Jacques Hadamard (1865–1963) – matematyk francuski.

²⁶ J. Hadamard, *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétique*. Bull. Soc. Math. France 24 (1896), 199–220; Ch.-J. de la Vallée Poussin, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*. Ann. Soc. Sci. Bruxelles 20 (1896), 183–256.

²⁷ Atle Selberg (1917–2007) – matematyk norweski, Medal Fieldsa w 1950 r.

²⁸ A. Selberg, *An elementary proof of the prime-number theorem*. Ann. of Math. 50(2)(1949), 305–313.

²⁹ Paul Erdős (1913–1996) – matematyk węgierski.

³⁰ P. Erdős, *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 35(1949), 374–384.

Należy tutaj zaznaczyć, że termin „elementarny” nie jest synonimem terminu „łatwy”. W istocie rozumowanie Erdősa-Selberga do łatwych nie należy, a podejście analityczne, mimo zastosowania bardziej zaawansowanych środków, jest prostsze.

WARUNKI RÓWNOWAŻNE HIPOTEZIE RIEMANNA

Znanych jest bardzo dużo stwierdzeń równoważnych Hipotezie Riemanna opartych na istotnie różnych ideach³¹, wiele z nich ma liczne warianty. To sprawia, że liczba możliwych sformułowań Hipotezy jest nieograniczona. Oto kilka przykładów.

Hipoteza jest stwierdzeniem dotyczącym funkcji zmiennej zespolonej, w konsekwencji najbardziej oczywiste są jej przeformułowania w języku tej teorii. Oznaczmy przez $\mu(n)$ tak zwaną *funkcję Möbiusa*, jedną z najważniejszych funkcji arytmetycznych badanych w teorii liczb. Zdefiniowana jest ona wzorem

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n = 1, \\ (-1)^r & \text{gdy } n \text{ jest iloczynem } r \text{ różnych liczb pierwszych,} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Dla $\sigma > 1$ zachodzi następujący wzór

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Hipoteza Riemanna jest w sposób oczywisty równoważna stwierdzeniu, że funkcja $1/\zeta(s)$ jest holomorficzna dla $\sigma > 1/2$. To z kolei jest równoważne temu, że powyższy szereg jest zbieżny w tej półpłaszczyźnie.

Inny warunek konieczny i dostateczny dla prawdziwości Hipotezy Riemanna jest następujący³²

$$\zeta'(s) \neq 0 \quad \text{dla} \quad 0 < \sigma < 1/2,$$

³¹ Por. Kevin Broughan, *Equivalents of the Riemann Hypothesis, vol. 1 and 2.*, Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

³² Występujący tu symbol $\zeta'(s)$ oznacza pochodną (zespoloną) funkcji dzeta Riemanna.

co udowodnił Andreas Speiser³³. Natomiast Jeffrey C. Lagarias³⁴ wykazał, że jest nim również to, iż³⁵

$$\Re\left(\frac{\xi'}{\xi}(s)\right) > 0 \quad \text{dla} \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

Całą serię warunków równoważnych można sformułować w języku arytmetyki. Oczywiście podstawowy z nich dotyczy liczb pierwszych: Hipoteza Riemanna jest równoważna silnemu oszacowaniu wielkości części resztowego w Twierdzeniu o liczbach pierwszych:

$$\pi(x) = \text{li}(x) + O(\sqrt{x} \log x). \quad (16)$$

Z cytowanego wcześniej twierdzenia Littlewooda (11) wynika, że tego oszacowania nie można już bardziej, w sposób znaczący poprawić. Podobne warunki równoważne można formułować, używając innych funkcji arytmetycznych. Dla przykładu Hipoteza Riemanna jest równoważna następującemu oszacowaniu sumy wartości funkcji Möbiusa: dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\left| \sum_{n \leq x} \mu(n) \right| \leq x^{1/2+\varepsilon} \quad (x \geq x_0(\varepsilon)). \quad (17)$$

Powyższe stwierdzenie można przeformułować w języku teorii macierzy w sposób następujący. Dla ustalonej liczby naturalnej n definiujemy macierz Redheffera $R_n = [R_n(i, j)]$ stopnia n , określając jej wyrazy wzorem

$$R_n(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } j = 1 \text{ lub } i|j, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Można wykazać, że

$$\det R_n = \sum_{k=1}^n \mu(k).$$

Wnioskujemy stąd, że Hipoteza Riemanna jest równoważna stwierdzeniu, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\det R_n \leq n^{1/2+\varepsilon} \quad (n \geq n_0(\varepsilon))$$

³³ A. Speiser, *Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion*. Math. Ann. 110(1935), no. 1, 514–521.

³⁴ J.C. Lagarias, *On a positivity property of the Riemann ξ -function*. Acta Arith. 89(3)(1999), 217–234.

³⁵ Dla dowolnej liczby zespolonej z , symbol $\Re(z)$ oznacza jej część rzeczywistą.

(Raymond M. Redheffer³⁶.) Fakt ten można również wyrazić w terminach teorii grafów³⁷.

Wariantem poprzedniego warunku równoważnego jest następujący, sformułowany za pomocą tak zwanej *funkcji Liouville'a*. Definiujemy ją wzorem

$$\lambda(n) = (-1)^{\omega(n)},$$

gdzie $\omega(n)$ oznacza liczbę różnych dzielników pierwszych liczby n . Podobnie jak w przypadku funkcji Möbiusa, Hipoteza Riemanna jest równoważna temu, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\left| \sum_{n \leq x} \lambda(n) \right| \leq x^{1/2+\varepsilon} \quad (x \geq x_0(\varepsilon)).$$

Zupełnie inny warunek równoważny, używający funkcji $\sigma(n)$ równej sumie dzielników naturalnych liczby n , podał Guy Robin³⁸:

$$HR \iff \sigma(n) < e^{\gamma} n \log \log n \text{ dla } n \geq 5041.$$

Zwraca uwagę elementarność tego warunku.

Zaskakujące jest to, że Hipotezę Riemanna można sformułować, używając zwykłych ułamków. Możliwość taką opisał Jérôme Franel³⁹ w 1924 roku. *Ciągiem Fareya* rzędu n nazywamy ciąg rosnący liczb wymiernych (ułamków) postaci a/q , gdzie $0 \leq a \leq q \leq n$ oraz a i q są względnie pierwsze. Zapiszmy taki ciąg następująco

$$\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_m.$$

Hipoteza Riemanna jest równoważna stwierdzeniu, że ułamki te ułożone są „bardzo regularnie”. Dokładniej,

$$\sum_{j=1}^m \left| \eta_j - \frac{j}{m} \right|^2 \leq n^{-1+\varepsilon} \quad (n \geq n_0(\varepsilon)).$$

³⁶ R.M. Redheffer, *Eine explizit lösbare optimierungsaufgabe*. Internat. Schriftenreihe Numer. Math. 142(1977), 141–152.

³⁷ Por. W. Barratt, R.W. Forcade, A.D. Pollington, *On the spectral radius of a (0,1) matrix related to Mertens' function*. Linear Algebra Appl. 107(1988), 151–159.

³⁸ G. Robin, *Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et Hypothèse de Riemann*. J. Math. Pures Appl. (9) 63(1984), no. 2, 187–213.

³⁹ J. Franel, *Les suites de Farey et le problème des nombres premières*. Göttinger Nachrichten (1924), 198–201.

Istnieje cała grupa warunków równoważnych Hipotezie Riemanna, które postulują stały znak pewnych wyrażeń. Do tej grupy należy tak zwane *kryterium Li*⁴⁰, które stwierdza, że Hipoteza jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{\rho} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)^n \right) \geq 0 \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Inny warunek równoważny, nawiązujący do dodatniej określoności, sformułował György Pólya⁴¹:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) \Phi(\beta) e^{i(\alpha+\beta)x} e^{(\alpha-\beta)y} (\alpha - \beta)^2 d\alpha d\beta \geq 0$$

dla dowolnych rzeczywistych x i y , gdzie

$$\Phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n^4 \pi^2 e^{\frac{9}{2}u} - 3n^2 \pi e^{\frac{5}{2}u}) e^{-n^2 \pi e^{2u}}.$$

Ciekawe jest to, że Hipotezę Riemanna można sformułować w terminach analizy funkcjonalnej. Oznaczmy przez $L^2(0, 1)$ przestrzeń Banacha funkcji całkownych z kwadratem (w sensie Lebesgue'a) na przedziale $(0, 1)$. Hipoteza Riemanna jest równoważna stwierdzeniu, że zbiór funkcji postaci

$$f(t) = \sum_{k=1}^n c_k \{ \theta_k / t \},$$

gdzie dla dowolnej liczby rzeczywistej x symbol $\{x\} = x - [x]$ oznacza część ułamkową x , natomiast parametry θ_k i współczynniki c_k spełniają warunki

$$\theta_k \in (0, 1) \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^n c_k = 0,$$

⁴⁰ Xian-Jin Li, *The Positivity of a Sequence of Numbers and the Riemann Hypothesis*. J. Number Theory 65(1997), 325–333.

⁴¹ G. Pólya, *Über die algebraisch funktionentheoretischen Untersuchungen von J.L.W.V. Jensen*. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. 7(1927), No.17.

jest gęsty w $L^2(0, 1)$ (B. Nyman⁴²). Inny warunek równoważny odwołujący się do tej samej przestrzeni funkcyjnej można sformułować następująco. Niech

$$A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$$

będzie operatorem całkowym zdefiniowanym wzorem

$$Af(u) = \int_0^1 f(x) \left\{ \frac{u}{x} \right\} dx \quad (f \in L^2(0, 1), u \in (0, 1)).$$

Hipoteza Riemanna jest równoważna stwierdzeniu, że A jest różnowartościowy, to znaczy dla różnych funkcji $f, g \in L^2(0, 1)$ przyjmuje różne wartości (J. Alcántara-Bode⁴³).

Warunek równoważny wyrażony w terminach analizy funkcji zmiennej rzeczywistej podał Marcel Riesz⁴⁴: dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{(k-1)! \zeta(2k)} \right| \leq x^{1/2+\varepsilon}$$

przy $x \geq x_0(\varepsilon)$.

Na zakończenie tego krótkiego przeglądu warto wspomnieć o warunku równoważnym z Hipotezą Riemanna sformułowanym w terminach algebry, a ściślej mówiąc teorii grup. Niech S_n oznacza grupę symetryczną zbioru n -elementowego, której elementami są permutacje zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, a działaniem grupowym składanie permutacji. Niech ponadto $g(n)$ oznacza maksymalny rząd elementu S_n . Hipoteza Riemanna jest równoważna temu, że

$$\log g(n) < (\text{li}(n))^{-\frac{1}{2}}$$

(J.-P. Massias, J.-L. Nicolas, G. Robin⁴⁵).

⁴² B. Nyman, *On some groups and semigroups of translations*. Thesis, Uppsala (1950).

⁴³ J. Alcántara-Bode, *An integral equation formulation of the Riemann hypothesis*. Integral Equations Operator Theory 17(1993), no. 2, 151–168.

⁴⁴ M. Riesz, *Sur l'hypothèse de Riemann*. Acta Mathematica 40(1916), 185–190.

⁴⁵ J.-P. Massias, J.-L. Nicolas, G. Robin, *Évaluation asymptotique de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique*. Acta Arith. 50(1988), 221–242.

FUNKCJE L W TEORII LICZB

Funkcja dzeta Riemanna jest tylko jedną z wielu podobnych funkcji rozważanych w teorii liczb i znanych pod wspólną nazwą *funkcji L* . Pojawiły się one w sposób naturalny przy badaniu rozmaitych zagadnień arytmetycznych i z biegiem czasu stały się nieodzownym narzędziem w rękach teoretyków liczb. Trudno podać ścisłą definicję funkcji L . Najbardziej udana próba aksjomatyzacji pochodzi od Atle Selberga, który w 1989 roku wyodrębnił najważniejsze własności znanych funkcji L i przyjął je jako aksjomaty tak zwanej *klasy Selberga*⁴⁶. Pomijając funkcję stałą równą 1, funkcja dzeta Riemanna jest najprostszym, ale niezwykle ważnym elementem tej klasy. Przytoczenie definicji innych elementów wykracza poza skromne ramy niniejszego opracowania. Ograniczę się tylko do wymienienia niektórych z nich, jednocześnie kierując zainteresowanego Czytelnika do stosownej literatury. Od razu chciałbym uprzedzić, że osobie nieposiadającej odpowiedniego przygotowania matematycznego wymienione nazwy mogą niewiele mówić. Przytaczam je, aby zilustrować fakt, iż przyglądając się funkcji dzeta Riemanna, widzimy tylko wierzchołek góry lodowej, przejaw znacznie rozleglejszej teorii. Dodajmy, że dla wszystkich wymienionych niżej funkcji spodziewamy się, iż prawdziwy jest odpowiednik Hipotezy Riemanna.

Różne rodzaje funkcji L :

- funkcje L Dirichleta z charakterami pierwotnymi⁴⁷,
- funkcje dzeta Dedekinda ciał algebraicznych oraz funkcje L Heckeego z pierwotnymi charakterami Heckeego⁴⁸,
- funkcje L Artina nieprzywiedlnych reprezentacji Galois⁴⁹,
- funkcje dzeta form modularnych (*newforms* i *Maass waves*) oraz, ogólnie

⁴⁶ A. Selberg, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*. Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989), 367–385, Univ. Salerno, Salerno, 1992.

⁴⁷ H. Davenport, *Multiplicative number theory*, Third edition. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery. Graduate Texts in Mathematics, 74. Springer-Verlag, New York, 2000. xiv+177 pp.

⁴⁸ W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, Third edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xii+708 pp.

⁴⁹ H. Heilbronn, *Zeta-functions and L-functions*. Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965), 204–230, Thompson, Washington, D.C., 1967.

- niej, funkcje L reprezentacji automorficznych (funkcje L Langlandsa)⁵⁰,
- globalne funkcje L rozmaitości algebraicznych nad ciałami skończonymi (w szczególności funkcje Hassego-Weila krzywych eliptycznych)⁵¹.

DLACZEGO HIPOTEZA RIEMANNA JEST WAŻNA?

Hipoteza Riemanna jest ważna z powodu swych daleko idących konsekwencji. Znanych jest obecnie kilkaset twierdzeń warunkowych, które są prawdziwe przy założeniu Hipotezy Riemanna. Są to twierdzenia z reguły bardzo silne, znacznie silniejsze od ich wersji „bezwarunkowych”, to znaczy udowodnionych bez zakładania prawdziwości Hipotezy. Warto przy tym zwrócić uwagę na fakt, że wyniki uzyskane przy jej założeniu mają zwykle walor stwierdzeń ostatecznych, to znaczy takich, których ulepszyć się już nie da. W paragrafie opisującym warunki równoważne Hipotezie Czytelnik znajdzie szereg wyników tego typu. Oczywiście najbardziej klasyczny przykład dotyczy oszacowania reszty w Twierdzeniu o liczbach pierwszych (16). Z Hipotezy Riemanna wynika również, że przy dowolnym $\varepsilon > 0$ każdy przedział postaci

$$[x, x + x^{1/2+\varepsilon}] \text{ dla } x \geq x_0(\varepsilon)$$

zawiera co najmniej jedną liczbę pierwszą, co więcej liczb tych jest „dużo”:

$$\pi(x+h) - \pi(x) \sim \frac{h}{\log x}, \quad h \geq x^{1/2+\varepsilon}. \quad (18)$$

Hipoteza Riemanna ma daleko idące konsekwencje dotyczące analitycznych własności funkcji dzeta. W szczególności pociąga za sobą prawdziwość tak zwanej *Hipotezy Lindelöfa*:

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll t^\varepsilon \quad (t \rightarrow \infty). \quad (19)$$

⁵⁰ H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xii+615 pp.

⁵¹ H. Iwaniec, E. Kowalski, *ibidem*.

To z kolei jest bardzo ważne przy dowodach wielu innych twierdzeń. Użyty we wzorze (19) symbol $\ll$ jest równoważny notacji O : zapis $f(x) \ll g(x)$ oznacza to samo co $f(x) = O(g(x))$.

Jeszcze bardziej spektakularne konsekwencje ma uogólniona Hipoteza Riemanna, to znaczy Hipoteza postulująca, że nietrywialne zera różnych funkcji L leżą na prostej krytycznej. Ze względu na dość techniczny charakter zagadnień, które zamierzamy teraz zasygnalizować, mniej przygotowany Czytelnik może bez żadnej straty pominąć lekturę dalszej części tego podrozdziału.

Bezpośrednie uogólnienia Twierdzenia o liczbach pierwszych dotyczą liczb pierwszych w postępach arytmetycznych oraz rozmieszczenia ideałów pierwszych w ciałach liczb algebraicznych. Bardzo ogólny wynik tego typu można sformułować następująco. Niech L/K będzie rozszerzeniem Galois ciał liczbowych, natomiast $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ ideałem pierwszym, nierozgałęzionym w L/K , zaś $C \subset \text{Gal}(L/K)$ – klasą elementów sprzężonych w grupie Galois rozszerzenia L/K . Niech ponadto

$$\pi_C(x) = \#\{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K : \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}} \right] \in C, N(\mathfrak{p}) \leq x\},$$

gdzie

$$\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}} \right]$$

oznacza tak zwany symbol Artina. Przy założeniu prawdziwości Hipotezy Riemanna dla funkcji L Hecke’a, przy dowolnym $\varepsilon > 0$ zachodzi następujący wzór asymptotyczny

$$\pi_C(x) = \frac{\#C}{(L : K)} \text{li}(x) + O(x^{1/2+\varepsilon}).$$

Prawdziwość uogólnionej Hipotezy Riemanna pociąga za sobą prawdziwość Hipotezy Artina o pierwiastkach pierwotnych. Można ją sformułować następująco. Liczbę całkowitą a nazywamy *pierwiastkiem pierwotnym modulo p* , gdzie p jest liczbą pierwszą, gdy dla dowolnej liczby całkowitej b , niepodzielnej przez p , istnieje wykładnik $k \in \mathbb{N}$ taki, że

$$b \equiv a^k \pmod{p}.$$

Hipoteza Artina postuluje, że każda liczba całkowita $a \neq -1$, niebędąca kwadratem, jest pierwiastkiem pierwotnym dla nieskończenie wielu liczb pierwszych p . Oznaczmy przez $N_a(x)$ liczbę liczb pierwszych $p \leq x$, dla których a jest pierwiastkiem pierwotnym. Hipoteza Artina przewiduje, że $N_a(x) \rightarrow \infty$ przy $x \rightarrow \infty$. Christopher Hooley⁵² udowodnił w 1967 roku, że jeżeli prawdziwa jest Hipoteza Riemanna dla funkcji dzeta Dedekinda ciał liczbowych, to

$$N_a(x) \sim c_0 \pi(x)$$

dla pewnej stałej $c_0 > 0$. Roger Heath-Brown⁵³ wykazał bez zakładania żadnych nieudowodnionych hipotez, że istnieją co najwyżej dwie liczby pierwsze a , dla których Hipoteza Artina nie jest prawdziwa.

Uogólniona Hipoteza Riemanna ma także ciekawe konsekwencje w geometrii algebraicznej. Niech E i E' będą nieizogenicznymi krzywymi eliptycznymi nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, o przewodnikach równych N_E i $N_{E'}$ odpowiednio. Hipoteza Riemanna dla funkcji Hassego-Weila implikuje⁵⁴, że istnieje liczba pierwsza

$$p \leq \log^2(N_E N_{E'}),$$

dla której redukcje E_p i E'_p są krzywymi eliptycznymi nad p -elementowym ciałem skończonym $\mathbb{F}_p$ oraz

$$\#E_p \neq \#E'_p.$$

HIPOTEZA I RZECZYWISTOŚĆ

Wspomnieliśmy poprzednio, że Hipoteza Riemanna pociąga za sobą prawdziwość Hipotezy Lindelöfa. Wyznaczanie dopuszczalnych wartości ε w oszacowaniu (19) jest klasycznym zagadnieniem analitycznej teorii liczb, któremu poświęcono wiele prac, opracowując bardzo wyrafinowa-

⁵² C. Hooley, *On Artin's conjecture*. J. Reine Angew. Math. 225(1967), 209–220.

⁵³ D.R. Heath-Brown, *Artin's conjecture for primitive roots*. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 37(1986), no. 145, 27–38.

⁵⁴ J.-P. Serre, *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev*. Collected Papers, vol. III (1972–1984), 563–641, Springer Verlag 1986.

ne metody. Ostatni krok postawił niedawno (2017) Jean Bourgain⁵⁵, który udowodnił, że Hipoteza Lindelöfa zachodzi dla $\varepsilon > 13/84$.

Dla ustalonych liczb $\sigma \geq 1/2$ oraz $T > 0$ oznaczmy przez $N(\sigma, T)$ liczbę nietrywialnych zer $\rho = \beta + i\gamma$ funkcji dzeta Riemanna spełniających nierówności

$$\beta \geq \sigma \text{ oraz } |\gamma| \leq T.$$

Oczywiście Hipoteza Riemanna przewiduje, że

$$N(\sigma, T) = 0 \text{ dla } \sigma > \frac{1}{2}, T > 0.$$

Tego nie potrafimy obecnie dowieść, ale możliwe do uzyskania są słabsze rezultaty postaci

$$N(\sigma, T) \ll T^{f(\sigma)} \quad (1/2 \leq \sigma \leq 1, T > 0),$$

gdzie $f(\sigma)$ jest nierosnącą funkcją zmiennej $\sigma \in [1/2, 1]$ taką, że $0 \leq f(\sigma) \leq 1$, a także oszacowania typu

$$N(\sigma, T) \ll T^{c(1-\sigma)} \quad (1/2 \leq \sigma \leq 1, T > 0), \quad (20)$$

gdzie c jest pewną stałą. Wyniki tego typu noszą nazwę *twierdzeń gęstościowych*. Znana Hipoteza Gęstościowa postuluje, że oszacowanie (20) jest prawdziwe dla dowolnego $c > 2$, ale najlepszy obecnie znany wynik pochodzi od Martina Huxleya⁵⁶ z roku 1972, który wykazał, że za c można wziąć dowolną liczbę większą od $12/5$. W roku 2000 Jean Bourgain⁵⁷ udowodnił, że Hipoteza Gęstościowa jest prawdziwa dla $\sigma \geq 25/32$. Wiadomo, że Hipoteza Lindelöfa implikuje Hipotezę Gęstościową. Ciekawe jest to, że Hipoteza Gęstościowa, jakkolwiek ewidentnie znacznie słabsza od Hipotezy Riemanna, wystarcza do wykazania bardzo silnego wyniku dotyczącego rozmieszczenia liczb pierwszych w „krótkich” przedziałach, a mianowicie wzoru (18), będącego – jak stwierdziliśmy wcze-

⁵⁵ J. Bourgain, *Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta function*. J. Amer. Math. Soc. 30(2017), no. 1, 205–224.

⁵⁶ M.N. Huxley, *On the difference between consecutive primes*. Invent. Math. 15(1972), 164–170.

⁵⁷ J. Bourgain, *On large values estimates for Dirichlet polynomials and the density hypothesis for the Riemann zeta function*. Internat. Math. Res. Notices 2000, no. 3, 133–146.

śniej – konsekwencją Hipotezy Riemanna. W cytowanej powyżej pracy z 1972 roku Martin Huxley wykazał, że formuła (18) jest prawdziwa dla $h \geq x^{7/12+\varepsilon}$.

Hipoteza Riemanna stwierdza, że obszar $\sigma > 1/2$ jest wolny od zer funkcji dzeta Riemanna. Widzieliśmy wcześniej, że znacznie słabsze stwierdzenie $\zeta(1+it) \neq 0$ dla $-\infty < t < \infty$ jest podstawą dowodu Twierdzenia o liczbach pierwszych. Stąd znaczenie twierdzeń wyznaczających obszary wolne od zer, zawierające punkty wewnątrz pasa krytycznego. Dla przykładu, podstawą dowodu formuły (15) jest fakt, wykazany przez de la Vallée Poussina, że $\zeta(\sigma+it) \neq 0$ dla

$$\sigma > 1 - \frac{c_0}{\log(2+|t|)} \quad (-\infty < t < \infty).$$

Iwan Winogradow⁵⁸ oraz niezależnie Mikołaj Korobow⁵⁹ wykazali, że

$$\zeta(\sigma+it) \neq 0 \quad \text{dla} \quad \sigma > 1 - \frac{1}{\log^\theta |t|}$$

$$(|t| \geq t_0(\theta) \quad \theta > 2/3).$$

Wynika stąd, że

$$\pi(x) = \text{li}(x) + O(xe^{-c \log^{\theta'} x}) \quad , \quad \theta' < 3/5.$$

Wiele prac poświęcono zerom funkcji dzeta, które zachowują się zgodnie z przewidywaniami, to znaczy leżą na prostej krytycznej. Niech $N_0(T)$ oznacza funkcję liczącą te zera:

$$N_0(T) = \#\{\rho = \frac{1}{2} + i\gamma : 0 < \gamma < T\}.$$

Oczywiście zgodnie z Hipotezą Riemanna powinniśmy mieć

$$N_0(T) = N(T) \quad (T \geq 0),$$

gdzie $N(T)$ jest rozważaną już przez nas poprzednio funkcją liczącą wszystkie zera nietrywialne, por. (14). Pierwszy ważny wynik dotyczący zer na

⁵⁸ I.M. Vinogradov, *A new estimate of the function $\zeta(1+it)$* , (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 22(1958), 161–164.

⁵⁹ N.M. Korobov, *Estimates of trigonometric sums and their applications* (Russian). Uspehi Mat. Nauk 13 1958 no. 4 (82), 185–192.

prostej krytycznej uzyskał w 1914 roku G.H. Hardy⁶⁰, który wykazał⁶¹, że takich zer jest nieskończenie wiele. Atle Selberg⁶² udowodnił w 1942 roku, że dodatnia gęstość zer nietrywialnych spełnia Hipotezę Riemanna, to znaczy, że

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0(T)}{N(T)} > 0.$$

Wynik ten został istotnie wzmocniony przez Normana Levinsona⁶³ w 1974 roku, natomiast H.M. Bui, Brian Conrey i Matthew Young⁶⁴ wykazali w 2011 roku, że

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0(T)}{N(T)} \geq 0.4105.$$

Implikuje to, że ponad 41% nietrywialnych zer funkcji dzeta Riemanna leży na prostej krytycznej. Mówiąc obrazowo – aczkolwiek niezbyt precyzyjnie – Hipoteza Riemanna jest udowodniona w 41 procentach. W cytowanej powyżej pracy Selberg wykazał również, że dla dowolnej funkcji $\Phi(t)$ dążącej do nieskończoności przy $t \rightarrow \infty$ prawie wszystkie nietrywialne zeta funkcji dzeta leżą w obszarze

$$\frac{1}{2} - \frac{\Phi(|t|)}{\log |t|} \leq \sigma \leq \frac{1}{2} + \frac{\Phi(|t|)}{\log |t|}, \quad (|t| \geq 2). \quad (21)$$

Powyższe stwierdzenie należy rozumieć w sensie gęstości. Dokładniej, oznaczając przez $N_1(T)$ liczbę zer $\rho = \beta + i\gamma$ funkcji dzeta Riemanna w obszarze (21), których części urojone spełniają nierówność $|\gamma| \leq T$, termin „prawie wszystkie” oznacza, że

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_1(T)}{N(T)} = 1.$$

⁶⁰ Godfrey Harold Hardy (1877–1947) – matematyk angielski.

⁶¹ G.H. Hardy, *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*. C. R. Acad. Sci. Paris 158(1914), 1012–1014.

⁶² A. Selberg, *On the zeros of Riemann's zeta-function*. Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I. 1942, (1942). no. 10, 59 pp.

⁶³ N. Levinson, *More than one third of zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$* , Advances in Math. 13 (1974), 383–436.

⁶⁴ H.M. Bui, B. Conrey, M. Young, *More than 41% of the zeros of the zeta function are on the critical line*. Acta Arith. 150(2011), no. 1, 35–64.

Można więc obrazowo powiedzieć, że nietrywialne zera, nawet jeśli nie leżą dokładnie na prostej krytycznej, to na pewno „grupują” się blisko niej.

CZY HIPOTEZA RIEMANNA JEST PRAWDZIWA? ARGUMENTY „ZA”

ARGUMENT „ESTETYCZNY”

Przy założeniu Hipotezy Riemanna teoria rozmieszczenia liczb pierwszych (i ich uogólnień) przybiera najprostszą i zarazem najbardziej elegancką formę.

Mimo że trudno uznać ten argument za czysto merytoryczny, to ma on wśród matematyków wielu gorących zwolenników. Osobom niebędącym matematykami czasami trudno jest zrozumieć łatwość, z jaką ci ostatni przykładają miarę estetyczną do teorii matematycznych. Często o twierdzeniach, formułach czy też całych teoriach mówią, że są „ładne”, czasami „piękne”. Ciekawym zadaniem psychologa nauki byłoby zbadanie, jakie dokładnie odczucia estetyczne kojarzą się matematykom z konkretnymi twierdzeniami. Na pewno chodzi tu o dwie podstawowe cechy: nietrywialność i prostotę. Rzeczy, które mówią o czymś coś ważnego i głębokiego w sposób prosty, jesteśmy skłonni uznać za piękne. Z kolei rozważania nadmiernie skomplikowane i nieprowadzące do jednoznacznych konkluzji stoją na drugim biegunie tej skali. Zwykle bywa tak, że odpowiedzi częściowe, jakkolwiek czasami wartościowe, nie oddziałują na zmysł estetyczny matematyka właśnie z tego powodu, że są zbyt zawile. Mamy tu niewątpliwie do czynienia z naturalnym dążeniem do harmonii, która zwykle objawia się w prostocie. „Prostotę” należy tu rozumieć w sposób subtelny, gdyż nie wyklucza ona głębi. Fakt, że zakładając prawdziwość Hipotezy Riemanna, można w stosunkowo prosty sposób udowodnić wiele ważnych twierdzeń dotyczących liczb pierwszych, czasami nadając im formę ostateczną, przemawia do wyobraźni i ma niewątpliwy walor estetyczny.

ARGUMENT Z GEOMETRII ALGEBRAICZNEJ

Odpowiednik Hipotezy Riemanna jest prawdziwy w przypadku funkcji dzeta rozkładu algebraicznych.

Funkcje dzeta rozważane w geometrii algebraicznej nie są bezpośrednim uogólnieniem funkcji dzeta Riemanna, a więc przynajmniej na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że twierdzenia ich dotyczące nie powinny mieć dla nas większego znaczenia. W istocie jest inaczej, gdyż istnieją zadziwiające podobieństwa między tymi dwiema teoriami. Niestety skromne ramy niniejszego opracowania nie pozwalają na dokładniejsze omówienie tych podobieństw. Nawet sama definicja geometrycznej funkcji dzeta jest zbyt techniczna, aby ją tutaj przytoczyć. Dość powiedzieć, że geometria algebraiczna zajmuje się badaniem obiektów geometrycznych zwanych rozmaitościami, których szczególnymi przypadkami są zbiory rozwiązań układów równań wielomianowych. Z rozmaitościami pewnego typu (np. dla nieosobliwych krzywych rzutowych nad ciałami skończonymi) można skojarzyć funkcje zmiennej zespolonej, zwane funkcjami dzeta rozmaitości, które są w pewnym sensie podobne do funkcji dzeta Riemanna. Różnią się jednak od tej ostatniej w sposób zasadniczy, na przykład są złożeniami funkcji wykładniczej i wymiernej, a więc z punktu widzenia analizy są obiektami nieskończenie prostszymi od funkcji dzeta Riemanna. Są też uderzające podobieństwa. Funkcje te są zdefiniowane za pomocą szeregu Dirichleta, posiadają odpowiednik iloczynu Eulera i spełniają pewne równanie funkcyjne łączące ich wartości w punktach s i $1-s$. Można więc mówić w tym przypadku o prostej krytycznej i pytać, czy wszystkie ich zera leżą na niej (funkcje te nie posiadają zer trywialnych). Inaczej mówiąc, w kontekście geometrycznych funkcji dzeta można w sposób sensowny sformułować analogon Hipotezy Riemanna. Podstawowe pojęcia i hipotezy dotyczące funkcji dzeta ogólnych rozmaitości algebraicznych pochodzą od André Weila⁶⁵ i datują się na lata 40. ubiegłego wieku. W szczególności w pracy z 1949 roku sformułował on cztery słynne hipotezy, nazwane później Hipotezami Weila, które opisywały hipotetyczne własności geometrycznych funkcji dzeta, między innymi postulowały prawdziwość analogonu Hipotezy Riemanna⁶⁶. Prace nad hipotezami Weila przyczyniły się w znamienity sposób do rozwoju geometrii algebraicznej i w znacznym stopniu rozwój ten ukierun-

⁶⁵ André Weil (1906–1998) – matematyk francuski.

⁶⁶ Por. A. Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bulletin of the AMS, 55(1949), 497–508.

kowały⁶⁷. Stosunkowo szybko udało się udowodnić trzy spośród czterech hipotez Weila, przy czym okazało się, że są one wnioskami z rozwiniętej przez Alexandra Grothendiecka⁶⁸ i jego współpracowników teorii tak zwanych kohomologii etalnych (możliwe są też inne podejścia). Najtrudniejszy do dowodu okazał się analogon Hipotezy Riemanna, ale w końcu i jego prawdziwość została udowodniona przez Pierre'a Deligne'a w latach 70. ubiegłego stulecia⁶⁹. Dowód odpowiednika Hipotezy Riemanna dla funkcji dzeta rozmaitości algebraicznych jest uważany za jedno z największych osiągnięć matematyki dwudziestego wieku. Jest też powszechnie uważany za najistotniejszy argument teoretyczny przemawiający za prawdziwością klasycznej Hipotezy Riemanna.

Warto wspomnieć, że niektóre szczególne przypadki funkcji dzeta omawianego wyżej typu były badane przed pojawieniem się ich ogólnej teorii. Na przykład Helmut Hasse⁷⁰ już w 1933 roku wykazał odpowiednik Hipotezy Riemanna w przypadku tak zwanych krzywych eliptycznych⁷¹.

ARGUMENT NUMERYCZNY

*Dziesięć bilionów (10^{13}) początkowych zer leży na prostej krytycznej i są one pojedyncze*⁷².

Już sam Riemann wyznaczył numeryczne wartości kilku początkowych zer nietrywialnych i stwierdził, że leżą one na prostej krytycznej. Numeryczne wyznaczanie nietrywialnych zer jest motywowane co

⁶⁷ Por. J. Dieudonné, *On the history of the Weil conjectures*. The Mathematical Intelligencer 10(1975), 7–21.

⁶⁸ Alexander Grothendieck (1928–2014) – matematyk francuski pochodzenia niemieckiego, Medal Fieldsa w 1966 r.

⁶⁹ P. Deligne, *La Conjecture de Weil I*. Publications Math. IHES 43(1974), 273–308; *La Conjecture de Weil II*, Publications Math. IHES 52(1980), 137–252.

⁷⁰ Helmut Hasse (1898–1979) – matematyk niemiecki.

⁷¹ Wynik opublikowano w 1936 roku w serii prac H. Hasse, *Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, II & III*. Crelle's Journal, 175(1936).

⁷² Stwierdzenie to, jakkolwiek intuicyjnie jasne, wymaga komentarza ze względu na użyty kolokwializm „zera początkowe”. Należy je rozumieć następująco: jeżeli zera nietrywialne o dodatniej części urojonej ustawimy w ciąg $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, przy czym $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \dots$, to dla $1 \leq n \leq 10^{13}$ mamy $\beta_n = 1/2$. Termin „zero pojedyncze” oznacza zero ρ , dla którego $\zeta'(\rho) \neq 0$.

najmniej dwiema przesłankami. Po pierwsze, znalezienie zera nietrywialnego leżącego poza prostą krytyczną rozstrzygnęłoby (negatywnie) Hipotezę Riemanna, natomiast stwierdzenie, że wiele z nich leży na prostej krytycznej jest ważnym argumentem za jej prawdziwością. Po drugie, wyznaczanie nietrywialnych zer jest dobrym testem na skuteczność istniejących algorytmów oraz współczesnych komputerów. Postęp w obliczeniach numerycznych zer ilustrują następujące dane. W roku 1905 znanych było 15 początkowych zer funkcji dzeta Riemanna (J.P. Gram). Położenie początkowego tysiąca zer poznaliśmy w 1956 roku (E.C. Titchmarsh, A. M. Turing), 250 tys. w 1966 roku (R.S. Lehman), 3,5 mln w 1968 (J.B. Rosser, J.M. Yohe, L. Schoenfeld), a 1,5 mld w 1986 (J. van de Lune, H.J.J. te Riele, D.T. Winter). W XXI wieku liczby te szybko wzrastały. W 2001 roku zlokalizowano 10 mld początkowych zer (J. van de Lune). Obecny rząd wielkości – 10 bilionów – osiągnięto w 2004 roku⁷³. Podkreślmy raz jeszcze, że w trakcie tych rozległych eksperymentów numerycznych nie znaleziono żadnego zera poza prostą krytyczną. Wszystkie znane w dniu dzisiejszym (2018) nietrywialne zera funkcji dzeta Riemanna są pojedyncze.

Dzisiaj każdy może łatwo zweryfikować przy użyciu popularnego komputera obliczenia z ery „przedkomputerowej”. Oto wartości dziesięciu nietrywialnych (początkowych) zer funkcji dzeta Riemanna obliczonych z dokładnością do dwudziestu miejsc dziesiętnych przy użyciu pakietu Mathematica. Czas obliczeń to ułamek sekundy.

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{1}{2} + i \, 14.13472514173469379045 \dots \\ \rho_2 &= \frac{1}{2} + i \, 21.02203963877155499262 \dots \\ \rho_3 &= \frac{1}{2} + i \, 25.01085758014568876321 \dots \\ \rho_4 &= \frac{1}{2} + i \, 30.42487612585951321031 \dots \\ \rho_5 &= \frac{1}{2} + i \, 32.93506158773918969066 \dots\end{aligned}$$

⁷³ Zainteresowany Czytelnik znajdzie wiele interesujących informacji na ten temat w pracy X. Gourdon, *The 10¹³ First Zeros of the Riemann Zeta Function, and Zeros Computation at Very Large Height*. Oct. 24, 2004, dostępnej w Internecie pod adresem <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf>.

$$\rho_6 = \frac{1}{2} + i 37.58617815882567125721 \dots$$

$$\rho_7 = \frac{1}{2} + i 40.91871901214749518739 \dots$$

$$\rho_8 = \frac{1}{2} + i 43.32707328091499951949 \dots$$

$$\rho_9 = \frac{1}{2} + i 48.00515088116715972794 \dots$$

$$\rho_{10} = \frac{1}{2} + i 49.77383247767230218191 \dots$$

ARGUMENT PROBABILISTYCZNY

Jeżeli zachowanie się liczb pierwszych jest „losowe”, to Hipoteza Riemanna jest prawdziwa z prawdopodobieństwem 1.

Jak widzieliśmy poprzednio, Hipoteza Riemanna jest równoważna temu, że rząd wzrostu funkcji sumacyjnej funkcji Möbiusa jest niewiele większy od funkcji pierwiastkowej, por. (17). Wiadomo, że $\mu(n)$ przyjmuje tylko wartości 0 oraz ± 1 . Dla uproszczenia skoncentrujemy się na wartościach niezerowych. Jeżeli liczba naturalna (bezkwadratowa) ma parzystą liczbę dzielników pierwszych, to $\mu(n) = 1$, w przeciwnym wypadku $\mu(n) = -1$. Rozważmy ciąg kolejnych liczb bezkwadratowych

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 21, 22 \dots$$

i odpowiadający mu ciąg wartości funkcji Möbiusa

$$1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1 \dots \quad (22)$$

Jeżeli zgodzimy się z poglądem, że liczby pierwsze pojawiają się w ciągu liczb naturalnych losowo, to wartości $+1$ oraz -1 w ciągu (22) powinny występować z tą samą częstością. Inaczej mówiąc, prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrany element ciągu (22) ma wartość 1, wynosi $1/2$. Zupełnie tak samo jest z wyrazami równymi -1 .

Można więc wyobrazić sobie następujący model probabilistyczny opisanej sytuacji. Rozpatrujemy nieskończony ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych, o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa danym

wzorem

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Niech $S(N) = \sum_{n \leq N} X_n$. Mówiąc obrazowo, opisany model odpowiada nieskończonemu ciągowi rzutów symetryczną monetą. Jeżeli w n -tym rzucie pojawi się orzeł, to wygrywamy złotówkę, jeśli pojawi się reszka – złotówkę płacimy. Wartość $S(N)$ to bilans naszego konta po N rzutach.

Zachodzi następujące twierdzenie znane z rachunku prawdopodobieństwa⁷⁴.

TWIERDZENIE: *Dla dowolnej liczby dodatniej ε oszacowanie: $|S(N)| \leq N^{1/2+\varepsilon}$ zachodzi z prawdopodobieństwem dążącym do 1 przy N dążącym do nieskończoności.*

Jeżeli więc liczby pierwsze są „naprawdę” rozmieszczone losowo i w związku z tym ciąg (22) jest typowym ciągiem składającym się z ± 1 , to wzór (17) – a wraz z nim Hipoteza Riemanna – są prawdziwe z prawdopodobieństwem 1.

ARGUMENT „INDUKCYJNY”

Wszystkie przewidywania oparte na założeniu, że Hipoteza Riemanna jest prawdziwa, o ile zostały rozstrzygnięte, okazały się prawdziwe.

Istnieje wiele przykładów ilustrujących opisane zjawisko. Dla przykładu omówimy bliżej dwa z nich: Hipotezę Goldbacha oraz opracowanie deterministycznego testu pierwszości działającego w czasie wielomianowym.

Hipoteza Goldbacha⁷⁵ to jedno z najbardziej znanych zagadnień teorii liczb, które w pełnej ogólności w dniu dzisiejszym (2018) nadal pozostaje otwarte. Niemniej jednak udało się niedawno rozstrzygnąć jego ważny przypadek, a mianowicie tak zwaną słabą Hipotezę Goldbacha, przy

⁷⁴ Jest to prosty wniosek z tak zwanego Centralnego Twierdzenia Granicznego, które można znaleźć w każdym dobrym podręczniku rachunku prawdopodobieństwa, por. np. W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. T. 1, rozdział X, PWN, Warszawa 2017.

⁷⁵ Christian Goldbach (1690–1764) – matematyk pruski.

czym najpierw uczyniono istotny postęp przy założeniu (uogólnionej) Hipotezy Riemanna, a następnie pozbyto się tego założenia. Hipotezę sformułował Goldbach w 1742 roku w liście do Eulera. Współcześnie przez Hipotezę Golbacha rozumie się następujące stwierdzenie: każda parzysta liczba naturalna większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych. Zauważmy, że wynika stąd natychmiast, że każda liczba naturalna większa od 3 jest sumą co najwyżej trzech liczb pierwszych. Natomiast przez słabą Hipotezę Goldbacha rozumie się stwierdzenie, że każda nieparzysta liczba naturalna większa od 5 może być przedstawiona jako suma trzech liczb pierwszych.

G.H. Hardy i J.E. Littlewood, zakładając prawdziwość uogólnionej Hipotezy Riemanna (dla funkcji L Dirichleta), wykazali⁷⁶, iż istnieje stała C taka, że wszystkie nieparzyste liczby naturalne $n > C$ są sumami trzech liczb pierwszych. A zatem udowodnili, że jeżeli prawdziwa jest uogólniona Hipoteza Riemanna, to prawdziwa jest również słaba Hipoteza Goldbacha dla wszystkich nieparzystych n z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby przypadków. Był to w tamtych czasach wynik sensacyjny, gdyż do tej pory uważano, że matematyka nie wypracowała jeszcze środków niezbędnych do zaatakowania tak subtelного zagadnienia⁷⁷. Wynik Hardy’ego i Littlewooda uznano za bardzo silny argument na rzecz prawdziwości Hipotezy Goldbacha i niewątpliwie przyczynił się on do intensyfikacji badań w tym kierunku. Przełom nastąpił w 1937 roku, kiedy to I.M. Winogradow udowodnił twierdzenie Hardy’ego-Littlewooda bez zakładania Hipotezy Riemanna⁷⁸. Stała C w twierdzeniu Winogradowa była bardzo duża (oszacowano jej wartość na e^{3315}). Oszacowanie tej stałej było przedmiotem badań wielu matematyków, jednak jej wartość była zbyt wielka, aby można było zweryfikować numerycznie pozostałe przypadki. Ostatecznie w 2014 roku Harald Helfgott⁷⁹ wykazał, że $C \leq 10^{27}$, co po-

⁷⁶ G.H. Hardy and J.E. Littlewood, *Some problems of ‘Partitio numerorum’*; III: *On the expression of a number as a sum of primes*. Acta Math., 44(1)(1923), 1–70.

⁷⁷ Znany niemiecki teoretyk liczb Edmund Landau (1877–1938) w 1912 roku określił Hipotezę Goldbacha przymiotnikiem „unangreifbar”, por. E. Landau, *Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion*. Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians, volume 1, 93–108. Cambridge, 1912.

⁷⁸ I.M. Vinogradov, *Representation of an odd number as a sum of three primes*. Dokl. Akad. Nauk. SSR, 15(1937), 291–294.

⁷⁹ H. A. Helfgott, *The ternary Goldbach conjecture is true*. arXiv:1312.7748v2 [math.NT].

zwoliło na dokończenie rozumowania przy pomocy komputera⁸⁰ i w rezultacie doprowadziło do pełnego dowodu słabej Hipotezy Goldbacha.

Inny przykład zagadnienia, które najpierw zostało rozwiązane przy założeniu Hipotezy Riemanna, a następnie bezwarunkowo, należy do teorii algorytmów. W wielu zagadnieniach praktycznych, na przykład w kryptologii, potrzebne jest szybkie znajdowanie „dużych” liczb pierwszych, lub też stwierdzenie, czy dana liczba naturalna jest pierwsza. Dla małych liczb jest to zagadnienie proste. Na przykład, aby rozstrzygnąć, czy liczba 2017 jest pierwsza, wystarczy wykonać dzielenie z resztą tej-że liczby przez wszystkie liczby naturalne od niej mniejsze i przekonać się, czy wśród nich jest taka, która dzieli 2017 bez reszty. Nie nastręcza to większych trudności, gdyż wystarczy wykonać w tym celu zaledwie 22 dzielenia przez liczby nieparzyste nieprzekraczające 43 (dlaczego?). Oczywiście metodę można zastosować do dowolnej liczby naturalnej. Od razu też widać, że taki naiwny sposób postępowania można udoskonalić na wiele sposobów, ale w istocie nie prowadzi to do naprawdę dobrych rezultatów. Na przykład trudno w ten sposób stwierdzić, czy liczba

226474634626627

jest, czy też nie jest pierwsza. Proszę się o tym przekonać samemu. Prawdopodobnie po wykonaniu pewnej liczby prób, na przykład z użyciem kalkulatora, Czytelnik da za wygraną, bowiem najmniejszy dzielnik większy od 1 naszej liczby to 14624611. Do badania pierwszości liczb naturalnych opracowano znacznie lepsze metody (algorytmy), oparte na zaawansowanych wynikach teorii liczb. Istotna jest ich złożoność obliczeniowa, decydująca o prędkości działania. Teoretycznie najszybsze są algorytmy działające w czasie wielomianowym. Nie wnikając w nieco techniczną definicję tego pojęcia, będziemy używać określenia „algorytm działający w czasie wielomianowym” jako synonimu stwierdzenia „algorytm działający szybko”. Na marginesie odnotujmy, że algorytm testowania pierwszości polegający na kolejnym dzieleniu przez liczby mniejsze ma tak zwaną wykładniczą złożoność obliczeniową, a więc pod względem złożoności stanowi przeciwieństwo algorytmu działającego w czasie wielomianowym i dlatego nie nadaje się do użycia w przypadku „dużych” liczb naturalnych. Są jeszcze inne, poza złożonością

⁸⁰ Por. H.A. Helfgott, David J. Platt, *Numerical verification of the ternary Goldbach conjecture up to $8.875 \cdot 10^{30}$* . Exp. Math. 22(2013), no. 4, 406–409.

obliczeniową, kryteria, według których możemy klasyfikować algorytmy. Dla przykładu klasę wszystkich algorytmów dzielimy na algorytmy deterministyczne i probabilistyczne. Algorytmy pierwszej z wymienionych kategorii udzielają odpowiedzi pewnych (lub też nie udzielają odpowiedzi w ogóle), natomiast algorytmy probabilistyczne udzielają odpowiedzi poprawnych z pewnym ustalonym prawdopodobieństwem (zwykle bardzo bliskim 1). W wielu zastosowaniach praktycznych to nam w zupełności wystarcza, gdyż ryzyko popełnienia błędu mniejsze, powiedzmy od jednej milionowej, jest w wielu przypadkach akceptowalne. Algorytmy probabilistyczne mają tę przewagę nad algorytmami deterministycznymi, że działają zwykle znacznie szybciej. Z tych uwag widać, że w pewnym sensie najdoskonalszą klasą algorytmów są algorytmy deterministyczne działające w czasie wielomianowym. Przez długi czas było zagadnieniem otwartym, czy istnieją algorytmy tego typu rozwiązujące zagadnienie testowania pierwszościc liczb naturalnych. Istotną przesłanką wskazującą, że tak jest w istocie, było skonstruowanie tak zwanego testu Millera⁸¹. Nie wnikając w szczegóły, jest to deterministyczny test pierwszościc, o którym udowodniono, że działa w czasie wielomianowym przy założeniu Hipotezy Riemanna dla funkcji dzeta Dedekinda ciał kwadratowych. Praca Millera ukazała się w roku 1975. Jako ciekawostkę warto zaznaczyć, że niemal dziesięć lat wcześniej ten sam algorytm został zaproponowany przez matematyka radzieckiego M.M. Artjuhova i mimo że opublikowano go w *Acta Arithmetica*⁸² w 1967 roku, został on niemal niezauważony. Fakt, iż przy założeniu uogólnionej Hipotezy Riemanna można skonstruować deterministyczny test pierwszościc działający w czasie wielomianowym, wzbudził nadzieję na to, że można tej jakości algorytm zbudować bez zakładania żadnych nieudowodnionych hipotez. Stało się to dopiero w 2002 roku, gdy – ku zaskoczeniu wielu specjalistów – zrobiła to trójka matematyków hinduskich Manindra Agrawal, Neeraj Kayal oraz Nitin Saxena⁸³. Na ich cześć test ten zwany jest testem pierwszościc AKS.

⁸¹ Gary L. Miller, *Riemann's hypothesis and tests for primality*. Seventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing (Albuquerque, N.M., 1975), pp. 234–239. Assoc. Comput. Mach., New York, 1975.

⁸² M.M. Artjuhov, *Certain criteria for primality of numbers connected with the little Fermat theorem (Russian)*. *Acta Arith.* 12(1967), 355–364.

⁸³ Praca ukazała się drukiem dwa lata później, por. Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, Nitin Saxena, *PRIMES is in P*. *Annals of Mathematics*. 160(2)(2004), 781–793.

CZY HIPOTEZA RIEMANNA JEST PRAWDZIWA? ARGUMENTY „PRZECIW”

ARGUMENT „ANTYGEOMETRYCZNY”

Możliwa jest do pomyślenia sytuacja, w której Hipoteza Riemanna jest prawdziwa w przypadku „geometrycznych” funkcji dzeta i jednocześnie fałszywa dla $\zeta(s)$ (lub innych klasycznych funkcji L).

(Lokalne) funkcje dzeta rozważane w geometrii algebraicznej bardzo różnią się od funkcji L w teorii liczb. Np. są one funkcjami wymiernymi p^{-s} . Dlatego można mieć wątpliwości, czy rzeczywiście twierdzenie Deligne’a (dowód Hipotezy Riemanna dla tych funkcji) jest dostateczną podstawą do optymizmu. Właściwym odpowiednikiem klasycznych funkcji L , a w szczególności funkcji dzeta Riemanna, są tak zwane globalne funkcje dzeta rozmaitości algebraicznych będące nieskończonymi iloczynami „interesujących” części funkcji lokalnych. Jednak o nich w ogólności niewiele wiadomo. Samo udowodnienie dla nich istnienia przedłużenia analitycznego jest osobnym i niebanalnym wyzwaniem. Stwierdzenie tego faktu w bardzo szczególnym przypadku funkcji L wymiernych krzywych eliptycznych poprzez ukazanie ich związku z funkcjami L form modularnych ma doniosłe konsekwencje w teorii równań diofantycznych, w szczególności pociąga za sobą prawdziwość słynnego Wielkiego Twierdzenia Fermata⁸⁴.

ARGUMENT SCEPTYKA TECHNIKI OBLICZENIOWEJ

Obliczenia numeryczne mogą posiadać zbyt mały zakres, aby być miarodajnymi.

Wzorowi (14) można nadać następującą bardziej precyzyjną postać

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + \frac{7}{8} + S(T),$$

gdzie

$$S(T) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) + O\left(\frac{1}{T}\right),$$

⁸⁴ A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem*. *Annals of Mathematics*. 141(3)(1995), 443–551.

przy czym $\arg \zeta(\frac{1}{2} + it)$ oznacza odpowiednio zdefiniowaną gałąź argumentu funkcji dzeta Riemanna (dokładną definicję, ze względu na jej techniczny charakter, pomijam). Atle Selberg udowodnił⁸⁵ w 1944 roku, że dla dowolnej liczby naturalnej k , przy T dążącym do nieskończoności, mamy

$$\int_0^T |S(t)|^{2k} dt \sim \frac{(2k)!}{k!(2\pi)^{2k}} T(\log \log T)^k.$$

Wynika stąd, że $S(T)$ przyjmuje wartości rzędu

$$\sqrt{\log \log T}$$

dla nieskończenie wielu liczb rzeczywistych $T \rightarrow \infty$. W szczególności funkcja ta jest nieograniczona. Problem polega na tym, że funkcja $\sqrt{\log \log T}$ rośnie niezwykle wolno i w zakresie objętym obliczeniami jest ona praktycznie stałą:

$$\sqrt{\log \log T} < 3 \quad \text{dla} \quad T \leq 10^{3519}$$

oraz

$$\sqrt{\log \log T} < 100 \quad \text{dla} \quad T \leq 10^{10^{4342}}.$$

Nic więc dziwnego, że $|S(T)| < 1$ dla $T < 280$ oraz $|S(T)| < 2$ dla $T < 6800000$. Nie jest znana żadna wartość T , dla której $|S(T)| > 3$.

Powyższe fakty dają podstawę do spekulacji na temat wartości obliczeń numerycznych przy weryfikacji prawdziwości Hipotezy Riemanna. Sceptyk może tutaj argumentować, że tylko ich „skromny” zakres powoduje, iż nie możemy znaleźć żadnego zera leżącego poza prostą krytyczną. To, co się dzieje „naprawdę”, ukryte jest w zakresie, gdzie funkcja $S(T)$ wykonuje oscylacje o dużej amplitudzie, a więc tam, gdzie nasza współczesna technika obliczeniowa jest bezradna.

ARGUMENT ADMIRATORA MATEMATYKÓW

Dlaczego mimo wysiłku kilku pokoleń matematyków, w tym wielu bardzo wybitnych, osiągnięte rezultaty są bardziej niż skromne?

⁸⁵ A. Selberg, *On the remainder in the formula for $N(T)$, the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$* , Avh. Norske Vid. Akad. Oslo. I. 1944, (1944). no. 1, 27 pp.

Na przykład znane obszary wolne od zer zbiegają do prostej $\sigma = 1$, a nie, jak przewiduje Hipoteza, do prostej krytycznej. Być może nie jest to wynikiem słabości opracowanych metod, lecz odbiciem rzeczywistości, która jest bardziej skomplikowana, niż nam się to wydaje...

JAK MOŻNA UDOWODNIĆ HIPOTEZĘ RIEMANNA?

Tego oczywiście nikt nie wie. Hipoteza jest cały czas atakowana przy użyciu rozmaitych metod. Co roku pojawia się wiele manuskryptów, których autorzy twierdzą, że znaleźli dowód. Zwykle błąd w rozumowaniu jest wykrywany, zanim praca zostanie przesłana do redakcji jakiegoś poważnego czasopisma naukowego. Wiele z tych opracowań nie przedstawia żadnej wartości poznawczej, zdarzają się takie, które zawierają nietrywialną myśl. Wiele warunków równoważnych Hipotezie ma swoją genezę w nieudanej próbie dowodu. Jedną z najbardziej znanych historii tego typu jest związana z T. J. Stieltjesem⁸⁶, który w 1885 roku w liście do Ch. Hermite'a⁸⁷ twierdził, że potrafi dowieść, iż dla pewnej stałej dodatniej c_0 oraz dla wszystkich liczb $x \geq 1$ prawdziwa jest następująca nierówność

$$\left| \sum_{n \leq x} \mu(n) \right| \leq c_0 \sqrt{x}, \quad (23)$$

gdzie $\mu(n)$ oznacza funkcję Möbiusa. Z tego stwierdzenia wynika natychmiast prawdziwość Hipotezy Riemanna. Niestety Stieltjes nigdy nie opublikował swojego dowodu i jest bardzo prawdopodobne, że znalazł w nim błąd. Warto dodać, że jego twierdzenie do dnia dzisiejszego nie zostało udowodnione i przypuszcza się, że jest fałszywe. Niemniej jednak w próbie Stieltjesa była zawarta pewna ciekawa idea, a mianowicie związek Hipotezy z funkcją Möbiusa. Związek ten w sposób ścisły został przez nas opisany w części omawiającej warunki równoważne z Hipotezą Riemanna, por. wzór (17). Dodajmy na marginesie, że tak zwana Hipoteza

⁸⁶ Thomas Joannes Stieltjes (1856–1894) – matematyk holenderski.

⁸⁷ Charles Hermite (1822–1901) – matematyk francuski.

Mertensa⁸⁸, postulująca, że we wzorze (23) można przyjąć $c_0 = 1$ okazała się nieprawdziwa⁸⁹.

Pytając o to, jak można udowodnić Hipotezę Riemanna, można mieć na myśli wskazanie jakiejś ogólnej idei lub kierunku badań, które mogą doprowadzić do rozstrzygnięcia. Wydaje się, że najbardziej obiecujące są w chwili obecnej dwa podejścia.

Pierwsze z nich jest dość oczywiste. Skoro najbardziej spektakularny sukces odnotowano w odniesieniu do hipotez Weila, to narzucającą się ideą jest próba uogólnienia dowodu Deligne'a. Od razu jednak pojawiają się trudności. Dowód odpowiednika Hipotezy Riemanna dla funkcji dzeta rozmaitości algebraicznych nad ciałami skończonymi opierał się na środkach typowych dla geometrii, takich jak na przykład kohomologie etalne. Aby przenieść dowód na przypadek funkcji dzeta Riemanna, należałoby zbudować odpowiednik wspomnianej teorii kohomologii dla charakterystyki zero. Mimo podejmowanych prób w tym kierunku, nie udało się tego dokonać.

Drugim podejściem jest pomysł pochodzący od D. Hilberta⁹⁰ i G. Pólyi, polegający na tym, aby skonstruować operator hermitowski działający na przestrzeni Hilberta, którego wartościami własnymi są liczby $i(\rho - \frac{1}{2})$, gdzie ρ przebiega zbiór nietrywialnych zer funkcji dzeta Riemanna. Z ogólnej teorii takich operatorów wiadomo, że ich wartości własne są liczbami rzeczywistymi. Zatem, gdyby program Hilberta-Pólyi został zrealizowany, oznaczałoby to, że zera nietrywialne leżą na prostej krytycznej, a więc, że Hipoteza Riemanna jest prawdziwa. Mimo wielu prób do dnia dzisiejszego nie udało się takiego operatora skonstruować. Niemniej jednak prace w tym kierunku doprowadziły do znalezienia głębokich związków między teorią funkcji dzeta a teorią macierzy losowych. Odkryto bowiem, że części urojone zer zachowują się podobnie, jak wartości własne dużych macierzy losowych. Tematyka ta ma swoje źródło w pracy matematyka amerykańskiego H.L. Montgomery'ego, który na początku lat 70. ubiegłego stulecia badał statystyczny rozkład wartości odległości między kolejnymi zerami nietrywialnymi funkcji dzeta Rie-

⁸⁸ Franciszek (Franz) Mertens (1840–1927) – matematyk polsko-austriacki, profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego.

⁸⁹ A.M. Odlyzko, H.J.J. te Riele, *Disproof of the Mertens conjecture*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 357(1985), 138–160.

⁹⁰ David Hilbert (1862–1943) – matematyk niemiecki.

manna i w oparciu o swoje czysto teoretyczne badania doszedł do wniosku, że podlegają one ścisłym prawom, które – jak się wkrótce okazało – są tożsame z prawami rozkładu wartości własnych dużych macierzy losowych. Te ostatnie były (i nadal są) badane przez fizyków atomowych. Ten dość nieoczekiwany związek teorii liczb z fizyką matematyczną zawoocował rozwojem zupełnie nowego kierunku badań, wspólnego dla dwóch pozornie bardzo odległych dziedzin.

CZY ŚWIAT BYŁBY GORSZY, GDYBY HIPOTEZA RIEMANNA BYŁA FAŁSZYWA?

Myślę, że cierpliwy Czytelnik, jeśli dotarł do tego miejsca niniejszego eseju, ma już wyrobioną własną opinię. Zdecydowana większość współczesnych matematyków jest przekonana o prawdziwości Hipotezy Riemanna. Warto jednak zaznaczyć, że wśród wybitnych matematyków byli i tacy, którzy mieli inną opinię. W środowisku teoretyków liczb najczęściej wymienia się przy tej okazji dwa nazwiska: P. Turán⁹¹ i J.E. Littlewood. Obaj byli wybitnymi znawcami problematyki, a zatem trudno ich opinie ignorować. Z drugiej strony w ostatnich dziesięcioleciach przybyło więcej argumentów „za” niż „przeciw”. Poniżej przytaczam opinie czterech znanych, współczesnych teoretyków liczb. Znamienne jest to, że wszystkie wypowiedzi zdają się odnosić do argumentu estetycznego, jak widać szczególnie bliskiego matematykom. Zawierają one w pewnym sensie twierdzącą odpowiedź na pytanie zawarte w tytule tego eseju.

Enrico Bombieri⁹²: *„The failure of the Riemann hypothesis would create havoc in the distribution of prime numbers. This fact alone singles out the Riemann hypothesis as the main open question of prime number theory.”*⁹³

⁹¹ Pál Turán (1910–1976) – matematyk węgierski.

⁹² E. Bombieri, *Problems of the Millenium: the Riemann Hypothesis*. Clay Institute, Official problem description, <http://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis>

⁹³ Błędność Hipotezy Riemanna spowodowałaby spustoszenie w rozkładzie liczb pierwszych. Już sam ten fakt wyróżnia Hipotezę Riemanna jako główne zagadnienie otwarte teorii liczb pierwszych.

Peter Sarnak⁹⁴: „If [the Riemann Hypothesis is] not true, then the world is a very different place. The whole structure of integers and prime numbers would be very different to what we could imagine. In a way, it would be more interesting if it were false, but it would be a disaster because we've built so much round assuming its truth.”⁹⁵

Steve Gonek: „If there are lots of zeros off the line – and there might be – the whole picture is just horrible, horrible, very ugly. It's an Occam's razor sort of thing, you either have absolutely beautiful behaviour of prime numbers, they behave just like you want them to behave, or else it's really bad.”⁹⁶

Henryk Iwaniec: „Mother Nature has such beautiful harmonies, so you couldn't say that something like [the Riemann Hypothesis] is false.”⁹⁷

⁹⁴ Ten cytat, jak i dwa następne, pochodzi z książki K. Sabbagh, *Dr. Riemann's zeros*. Atlantic Books, 2002.

⁹⁵ Gdyby [Hipoteza Riemanna] nie była prawdziwa, to świat byłby zupełnie inny. Cała struktura liczb naturalnych i liczb pierwszych byłaby bardzo różna od tego, co możemy sobie wyobrazić. W pewnym sensie byłoby to bardziej interesujące, ale byłoby to katastrofą, gdyż tak wiele zbudowaliśmy na założeniu, że [Hipoteza Riemanna] jest prawdziwa.

⁹⁶ Jeżeli jest wiele zer poza prostą [krytyczną] – a może tak być – to cały obraz jest straszny i bardzo brzydki. Jest to kwestia brzytwy Okhama, albo mamy bezwzględnie piękne zachowanie się liczb pierwszych, zgodne z naszymi oczekiwaniami, albo jest bardzo źle.

⁹⁷ Matka Natura posiada tak piękną harmonię, że nie można twierdzić, aby coś takiego, jak Hipoteza Riemanna, było nieprawdą.

CZY FIZYK UDOWODNI HIPOTEZĘ RIEMANNA?

MAREK WOLF

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy. Szkoła Nauk Ścisłych
Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

Między duchem a materią pośredniczy matematyka.

Hugo Dyonizy Steinhaus (1887–1972)

Bernard G.F. Riemann żył niecałe 40 lat (1826–1866). Jednak w ciągu krótkiego życia dokonał tak wielu odkryć, że jest uważany za jednego z największych matematyków. Jego nazwisko występuje w wielu różnych dziedzinach matematyki, wspomnimy tutaj geometrię Riemanna, równania Cauchy’ego – Riemanna i powierzchnie Riemanna w teorii funkcji zmiennej zespolonej, całkę Riemanna i twierdzenie o szeregach warunkowo zbieżnych w analizie matematycznej, tensor Riemanna w geometrii różniczkowej. Jednak najbardziej jest znany ze sformułowania w swojej jedynej pracy z teorii liczb przypuszczenia obecnie nazywanego Hipotezą Riemanna (w dalszej części będziemy używać skrótów HR). Duże znaczenie HR wynika stąd, że zapewne kilka tysięcy twierdzeń zaczyna się od słów: „Załóżmy prawdziwość Hipotezy Riemanna, wtedy ...”

W roku 1900 podczas Kongresu Matematycznego w Paryżu D. Hilbert ogłosił listę 23 problemów do rozwiązania przez matematyków w XX wieku. Problem VIII składał się z dwóch części: Hipotezy Goldbacha i Hipotezy Riemanna. W roku 2000 HR pojawiła się na liście 7 problemów Clay Mathematics Institute na trzecie tysiąclecie, tym razem z obiecaną nagrodą miliona dolarów amerykańskich za jej rozstrzygnięcie.

Od czasów Euklidesa (około 330 p.n.e.) wiadomo, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych $2, 3, 5, 7, 11, \dots, p_n, \dots$. Dowód zamieszczony w *Elementach* był nie wprost. Pierwszy dowód wprost podał L. Euler około roku 1740, wykazując, że suma harmoniczna po liczbach pierwszych p_n jest rozbieżna:

$$\sum_{p_n < x} \frac{1}{p_n} \sim \log \log(x).$$

Naturalne jest pytanie o to, ile jest liczb pierwszych wśród liczb naturalnych mniejszych niż x . Tradycyjnie funkcję odpowiadającą na to pytanie oznacza się przez $\pi(x)$, tzn. $\pi(x) = \#\{p \text{ liczba pierwsza i } p < x\}$. Okazuje się, że tak nieregularna funkcja może być przybliżona przez proste wyrażenie analityczne: Carl Friedrich Gauss jako nastolatek odkrył, że trend wzrostu $\pi(x)$ opisany jest przez logarytm całkowity $\text{Li}(x)$:

$$\pi(x) \sim \text{Li}(x) := \int_2^x \frac{du}{\log(u)}. \quad (1)$$

Symbol $f(x) \sim g(x)$ oznacza tutaj $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$.

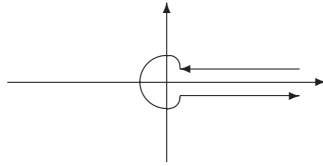
Droge prowadzącą do dowodu (1) wskazał Bernard Riemann w pracy [1]. Punktem wyjścia był wzór otrzymany przez Eulera:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \quad s = \sigma + it, \quad \Re[s] = \sigma > 1. \quad (2)$$

Po prawej stronie (2) iloczyn przebiega po wszystkich liczbach pierwszych $p = 2, 3, 5, \dots$. Osobliwość w iloczynie dla $p = 1$ jest jednym z powodów, dla których pierwszą liczbą pierwszą jest 2, a nie 1, która — zgodnie z aktualną konwencją — nie jest ani liczbą pierwszą, ani złożoną. W rzeczywistości Euler rozważał powyższy wzór dla naturalnych argumentów $k \geq 2$ (dla $k = 1$ mamy rozbieżny szereg harmoniczny): $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, a Riemann rozszerzył dziedzinę tej funkcji na całą płaszczyznę zespoloną $s = \sigma + it$ bez $s = 1$ ($t^2 = -1$, w dalszej części gwiazdka będzie oznaczać sprzężenie zespolone $(a + ib)^* = a - ib$, a, b są rzeczywiste). Dla s na lewo od linii $\Re[s] = 1$ Riemann określił dzetę przez przedłużenie analityczne

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}, \quad (3)$$

gdzie $\int_{+\infty}^{+\infty}$ oznacza całkę po poniższym konturze



Występująca w (3) funkcja gamma $\Gamma(z)$ ma wiele reprezentacji, np. w postaci iloczynu Weierstrassa:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma/z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k}. \quad (4)$$

Z tej definicji widać, że $\Gamma(z)$ jest zdefiniowana dla wszystkich liczb zespolonych z z pominięciem $z = 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$, gdzie Γ ma bieguny proste. Najpopularniejsza definicja funkcji gamma za pomocą całki $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ jest słuszna tylko dla $\Re[z] > 0$. Obecnie znanych jest kilkadziesiąt innych przedstawień funkcji $\zeta(s)$, praca [2] zawiera przegląd reprezentacji całkowych dla $\zeta(s)$. Riemann wykazał dalej, że $\zeta(s)$ spełnia *równanie funkcyjne*:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s), \quad \text{dla } s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}. \quad (5)$$

Powyższa postać równania funkcyjnego jest jawnie symetryczna względem linii prostej $\Re(s) = 1/2$: zamiana $s \rightarrow \frac{1}{2} + s$ po obu stronach (5) pokazuje, że kombinacja funkcji $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ przyjmuje tę samą wartość w punktach $\frac{1}{2} + s$ oraz $\frac{1}{2} - s$.

W pracy [1] Riemann w heurystyczny sposób wyprowadził *dokładny* wzór na $\pi(x)$:

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\mu(n)}{n} \left(\text{Li}(x^{1/n}) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho/n}) \right). \quad (6)$$

We wzorze powyżej N jest taką liczbą naturalną, że $x^{1/N} > 2 > x^{1/(N+1)}$, a $\mu(n)$ oznacza funkcję Möbiusa:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1 \\ 0 & \text{gdy } n \text{ jest podzielne przez kwadrat liczby} \\ & \text{pierwszej } p: p^2 | n \\ (-1)^r & \text{gdy } n = p_1 p_2 \dots p_r \end{cases} \quad (7)$$

Sumowanie w (6) po ρ oznacza sumowanie po rozwiązaniach równania $\zeta(\rho) = 0$, czyli po zerach dzety. Riemann udowodnił, że $\zeta(s)$ ma trywialne zera $\zeta(-2n) = 0$ i można wykazać, że ich wkład do (6) jest zaniedbywalny. Z kolei nietrywialne zera ρ_n mogą istnieć tylko wewnątrz pasa krytycznego $0 \leq \Re(s) \leq 1$, gdyż dla $\Re(s) > 1$ żaden czynnik iloczynu po p w (2) nie znika. Riemann założył, że te wszystkie nietrywialne zera ρ_n (był przekonany, że jest ich nieskończenie wiele, por. poniżej wzór (9) na liczbę zer $N(T)$) leżą na prostej krytycznej dokładnie pośrodku pasa krytycznego, tzn. mają część rzeczywistą równą $\frac{1}{2}$:

$$\textbf{Hipoteza Riemanna:} \quad \rho_n = \frac{1}{2} + i\gamma_n. \quad (8)$$

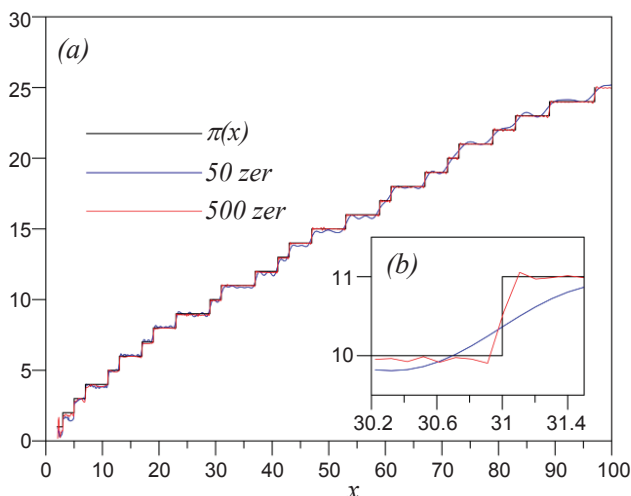
Z symetrii równania funkcyjnego (5) względem linii prostej $\Re(s) = 1/2$ oraz symetrii względem sprzężenia zespolonego $\zeta(s^*) = (\zeta(s))^*$ wynika, że jeżeli $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ jest zerem, to $\rho_n^* = \beta_n - i\gamma_n$ i $1 - \rho_n$, $1 - \rho_n^*$ są także zerami.

Równość (6) jest niezwykła: pomiędzy liczbami pierwszymi wykresem $\pi(x)$ jest poziomy odcinek, więc suma po wszystkich zerach musi dać w sumie z rosnącym trendem $\sum_{n=1}^N \frac{\mu(n)}{n} \text{Li}(x^{1/n})$ funkcję odcinkami stałą, która będzie skakać o jeden przy przejściu argumentu x przez kolejne liczby pierwsze, ilustruje to wykres na rys. 1. Ścisłe rzecz biorąc, szereg w (6) daje $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \{\pi(x - \epsilon) + \pi(x + \epsilon)\}$, więc dla x będącego liczbą pierwszą wartość otrzymana z szeregu po prawej stronie (6) leży w połowie pionowego stopnia między poziomymi odcinkami o rzędnych będących kolejnymi liczbami naturalnymi, zob. rys. 1(b). Wzór (6) nie został dotychczas udowodniony, zresztą szereg w (6) nie może być absolutnie zbieżny, gdyż wtedy nieskończona suma ciągłych składników byłaby funkcją ciągłą.

W roku 1896 J.S. Hadamard (1865 – 1963) and Ch.J. de la Vallée Poussin (1866–1962) niezależnie wykazali, że $\zeta(s)$ nie ma zer na linii $1 + it$, czyli $|x^\rho| < x$. Zatem z (6) wynika, że suma po zerach nietrywialnych będzie zawierać składnik x w potęgę mniejszej niż 1, więc dominujący wkład będzie pochodzić z pierwszego wyrazu w (6) $\mu(1)\text{Li}(x) \approx \frac{x}{\log(x)}$.

Na początku lat trzydziestych ubiegłego wieku Carl L. Siegel uzyskał dostęp do zachowanej spuścizny („Nachlass”) po Riemannie przechowywanej w bibliotece Uniwersytetu w Getyndze i przez blisko dwa lata pracowicie i z uporem studiował, zapisane trudno czytelnym charakterem pisma, jego notatki. Okazało się, że Riemann znalazł przybliżone warto-

ści kilku najniższych nietrywialnych zer dzety i stwierdził, że wszystkie one mają część rzeczywistą równą $\frac{1}{2}$. W tabeli 1 prezentujemy przybliżone wartości 10 pierwszych miejsc zerowych dzety w pasie krytycznym. W roku 1903 J.P. Gram [3] wyliczył pierwszych 15 zer $\zeta(s)$; w czerwcu 1950 roku Allan Turing wykorzystał komputer Mark 1 na Uniwersytecie w Manchester do wyliczenia 1104 zer. Ciekawostką jest to, że Turing nie wierzył w prawdziwość HR i przeprowadził obliczenia „... w nadziei, że będzie można znaleźć zera poza linią krytyczną”, zob. [4, str. 99]. Dziesięć lat temu S. Wedeniwski (2005) kierował internetowym projektem zetagrid [5], w ramach którego w ciągu czterech lat stwierdzono, że 10^{11} zer jest na linii krytycznej, tzn. na linii $\frac{1}{2} + it$ aż do $t < 29,538,618,432.236$.

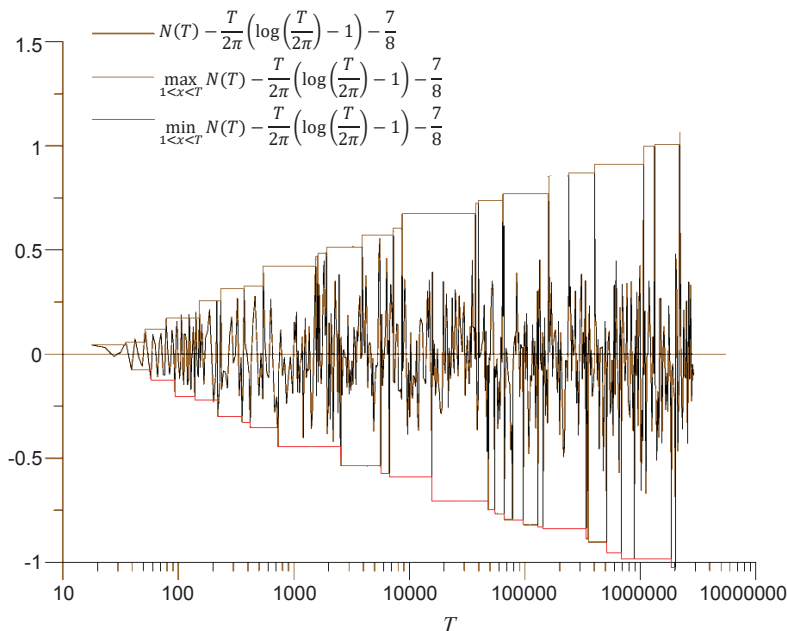


1. Porównanie wykresu $\pi(x)$ i prawej strony (6) z sumą po 50 i 500 nietrywialnych zerach $\zeta(s)$. Dla x będących liczbami pierwszymi wyraźnie widać, że niebieska linia przecina pionowe stopnie „schodów” wykresu $\pi(x)$ w przybliżeniu w ich połowie. Na rys. (b) pokazany jest ten efekt w powiększeniu wokół $x = 31$. Jest to zjawisko analogiczne do występującego w twierdzeniu Dirichleta o zbieżności szeregów Fouriera.

Niech $N(t)$ oznacza funkcję zliczającą nietrywialne zera do T , tzn. $N(T) = \sum_n \Theta(T - \Im[\rho_n])$. W swojej pracy z 1859 roku Riemann podał wzór:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi e}\right) + \frac{7}{8} + O(\log(T)), \quad (9)$$

który został udowodniony w 1905 roku przez von Mangoldta. Na rys. 2 pokazany jest wykres różnicy $N(T) - \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi e}\right) - \frac{7}{8}$ do $T = 5 \times 10^6$.



2. Wykres ilustrujący wzór (9) do $T = 5 \times 10^6$. Gdyby pionowy odcinek $(0, 1)$ miał długość 4 cm, to pozioma oś, narysowana w skali liniowej zamiast w logarytmicznej, miałaby długość 200 km.

Jak rozstrzygnąć (tzn. udowodnić albo obalić) HR? Praktycznie nikt nie stara się zrobić tego wprost. Znanych jest ponad 100 kryteriów albo równoważnych HR, albo takich stwierdzeń, z których prawdziwości wynika prawdziwość HR. W roku 2017 ukazała się dwutomowa monografia *Equivalents of the Riemann Hypothesis* [6] napisana przez K. Broughana.

Przez wiele lat wiązano nadzieję na udowodnienie HR z przypuszczeniem Mertensa. Funkcja Möbiusa zdefiniowana wzorem (7) przyjmuje tylko trzy wartości: -1 , 0 i 1 . Prawdopodobieństwa przyjęcia wartości $\mu(n) = 1$ oraz $\mu(n) = -1$ są takie same i wynoszą $3/\pi^2 \approx 0.3039$, zatem prawdopodobieństwo, że $\mu(n) = 0$ jest równe $1 - 6/\pi^2 \approx 0.3921$.

Tabela 1

n	$\frac{1}{2} + i\gamma'_n$	n	$\frac{1}{2} + i\gamma'_n$
1	$\frac{1}{2} + i14.134725142 \dots$	6	$\frac{1}{2} + i37.586178159 \dots$
2	$\frac{1}{2} + i21.022039639 \dots$	7	$\frac{1}{2} + i40.918719012 \dots$
3	$\frac{1}{2} + i25.010857580 \dots$	8	$\frac{1}{2} + i43.327073281 \dots$
4	$\frac{1}{2} + i30.424876126 \dots$	9	$\frac{1}{2} + i48.005150881 \dots$
5	$\frac{1}{2} + i32.935061588 \dots$	10	$\frac{1}{2} + i49.773832478 \dots$

Używając wartości 1 i -1 funkcji Möbiusa, możemy wygenerować jednowymiarowy ruch losowy: gdy $\mu(n) = 1$ idziemy o krok do góry, gdy $\mu(n) = -1$ idziemy o krok w dół, a gdy $\mu(n) = 0$ stoimy w miejscu. Całkowite przesunięcie takiego błędzenia losowego po wykonaniu n kroków jest dane przez funkcję sumacyjną $M(n) = \sum_{k \leq n} \mu(k)$, która nazywana jest funkcją Mertensa. Wiadomo, że średnie przesunięcie w symetrycznym ruchu losowym po wykonaniu n kroków rośnie jak $\sqrt{n}$ (niezależnie od wymiaru przestrzeni). To podobieństwo $M(n)$ do symetrycznego ruchu losowego doprowadziło F. Mertensa pod koniec XIX wieku do przypuszczenia, że $M(n)$ rośnie nie szybciej niż średnie przesunięcie w błędzeniu losowym, tzn. $|M(n)| < \sqrt{n}$. Łatwo pokazać, że z hipotezy Mertensa wynika HR. W 1985 roku A. Odlyzko i H. te Riele [7] obalili przypuszczenie Mertensa. Do dowodu użyli oni wartości pierwszych 2000 zer $\zeta(s)$ wyliczonych z dokładnością 100–105 cyfr. Te obliczenia zajęły 40 godzin na superkomputerze CDC CYBER 750 i 10 godzin na Cray-1. Rezultat Odlyzki i te Riele był wielkim wydarzeniem, o którym pisała nawet prasa codzienna (rys. 3).

W klasycznej książce *Jak to rozwiązać* [9] G. Pólya wskazuje, że czasem ogólniejszy problem może być łatwiejszy do rozwiązania niż przypadek szczególny. HR można uogólnić, rozważając rodzinę funkcji zmiennej zespolonej z parametryzowanej rzeczywistym parametrem λ :

$$H(z, \lambda) = \int_0^\infty \Phi(t) e^{\lambda t^2} \cos(zt) dt, \quad (10)$$

Herald Tribune INTERNATIONAL

Published With The New York Times and The Washington Post

THE HAGUE, WEDNESDAY, FEBRUARY 15, 1984

President's
leader of the Syrian

...in a major defeat when they
(Continued on Page 2, Col. 3)

...we should begin to talk
and negotiate on the problems that
at the moment, lie between us.

...dial, however, suggested that it
would not take much substantive
progress or even much promise of

...ever, that "you'll have to wait and
see what the position's going to
be."

...and then, when the foreign
peaceful coexistence is needed
more than ever in the age of nuclear
missiles.



The Associated Press

Profile at Winter Olympics

and his skis went up after he took a spill Tuesday in slalom at Sarajevo. He was disqualified. His teammate in slalom, won the event. Meanwhile, the British ice skater won the gold medal. Stories on Pages 6 and 7.

Math Theory Gets a Nay After 10 Billion Years

By Lee Dembart

Los Angeles Times Service

LOS ANGELES — A mathematical conjecture, first proposed almost a 100 years ago, that was known to be true for the first 10 billion numbers has been proved false.

Besides being a reminder that in mathematics nothing is true until it is proved true, the finding that the so-called Mertens conjecture is false has important consequences in several fields of study, including number theory and algebra.

"It just shows you again that you have to be very careful," Andrew Odlyzko of Bell Laboratories, one of the disprovers of the Mertens conjecture, said Monday. "Empirical evidence can very often be misleading."

The most significant consequence is that the Riemann hypothesis, considered the most important unsolved problem in mathematics today, remains unsolved. If the Mertens conjecture were true, it would have directly implied the truth of the Riemann hypothesis, which is in itself the linchpin of a shelf of unsolved problems in mathematics.

However, the falsity of the Mertens conjecture does not imply that the Riemann hypothesis is false. That remains an open question.

Mr. Odlyzko and Herman te Riele of the Center for Mathematics and Computer Science in Amsterdam disproved the Mertens conjecture using fast computers and an improved method of testing. The conjecture, first proposed by J.J. Stieltjes in 1855 and later by F.

Mertens in 1897, is a statement about the behavior of a function derived from the number of prime factors in each whole number from 1 to infinity.

Mr. Odlyzko and Mr. te Riele have not found a single counterexample to the conjecture, and it is not clear that they or anyone ever will. They believe that a counterexample will be found around 10 to the 10th power to the 70th power, which is a number larger than the number of atoms in the universe and well beyond the ability of any computer to calculate.

"No one has an inkling of how you might compute it," Ronald Graham of Bell Laboratories said. "It might conceivably be a problem which you know has to fail but you'll never find a value for which it fails."

Nevertheless, Mr. Odlyzko said Monday, his and Mr. te Riele's work shows that "there are infinitely many counterexamples" to the Mertens conjecture — even if none is ever found.

Using pencil and paper, Mertens himself showed that his hypothesis was true for the first 10,000 integers, which are the whole numbers 1, 2, 3, 4 and so on. In 1913, another mathematician calculated that it was true for the first 5 million integers. In 1963, a computer was used to show that it was true for the first 10 billion integers.

"It would be hard to disprove by computation," he said.

The Mertens conjecture says that the special summation function derived from the number

of prime factors in a number is always less than the number's square root. As the numbers increase, the summation function shows no particular form.

Those who had hoped that the Mertens conjecture was true because of its implications for the Riemann hypothesis will be disappointed. A proof of the Riemann hypothesis would result in important improvements in work on prime numbers, one of the most significant elements of contemporary work in number theory.

So important is the Riemann hypothesis that an entire chapter of a 1977 book was titled "Under the Assumption of the Riemann Hypothesis," and it listed many theorems that depend on it. The hypothesis, proposed by Bernhard Riemann in 1859, involves the places where the Riemann zeta function equals 0.

Using computers, the hypothesis has been tested for the first 320 million 0s. Similarly, Fermat's last theorem, another important outstanding problem, has been tested and shown to be true for the first 125,000 numbers.

But, as is shown by the disproof of the Mertens conjecture, just because the Riemann hypothesis is true for the first 320 million 0s does not mean it is always true. It is a similar case for Fermat's last theorem and the first 125,000 exponents.

The problem is that the number of integers is infinite, so no matter how many individual cases are studied, there will always be infinitely many that have not been.

3. Artykuł w „The Herald Tribune” z 15 lutego 1984 omawiający pracę Odlyzki i te Riele. Tytuł nawiązuje do tego, że nierówność $|M(n)| < \sqrt{n}$ jest spełniona dla n aż do wielu miliardów, a mimo to gdzieś następuje zmiana znaku nierówności. W pracy [8] pokazano, że na pewno istnieje takie $n < \exp(1.59 \times 10^{40})$ (liczba ta jest znacznie większa niż liczba atomów w dostępnej obserwacyjnie części Wszechświata), że $|M(n)| > \sqrt{n}$.

gdzie

$$\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi^2 n^4 e^{9t} - 3\pi n^2 e^{5t}) e^{-\pi n^2 e^{4t}}. \quad (11)$$

Zachodzi związek $H(z, 0) = \frac{1}{8} \xi(\frac{1}{2}z)$, gdzie funkcja $\xi(z)$ związana jest z funkcją dzeta relacją:

$$\xi(iz) = \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) \pi^{-\frac{z}{2} - \frac{1}{4}} \Gamma \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{4} \right) \zeta \left(z + \frac{1}{2} \right). \quad (12)$$

Z powyższego związku widać, że $HR \Leftrightarrow$ wszystkie miejsca zerowe $\xi(iz)$ są rzeczywiste. W roku 1950 G. De Bruijn udowodnił [10], że dla $\lambda \geq \frac{1}{2}$ funkcja $H(z, \lambda)$ ma jedynie rzeczywiste zera oraz że jeżeli $H(z, \lambda)$ ma tylko rzeczywiste miejsca zerowe dla pewnego λ' , to $H(z, \lambda)$ ma wyłącznie

rzeczywiste zera dla każdego $\lambda > \lambda'$. W roku 1976 Ch. Newman [11] udowodnił, że istnieje taka wartość parametru λ_1 , że $H(z, \lambda_1)$ ma co najmniej jedno zero zespolone. Zatem istnieje taka stała $\Lambda \in (-\infty < \frac{1}{2})$, że $H(z, \lambda)$ ma rzeczywiste zera $\Leftrightarrow \lambda > \Lambda$. Aby HR była prawdziwa, wartość parametru $\lambda = 0$ musi się znajdować w przedziale liczb większych lub równych Λ . Zatem HR jest równoważna temu, że $\Lambda \leq 0$. Stała Λ jest teraz nazywana stałą de Bruijna–Newmana. Wartość Λ może być wyznaczona numerycznie. Pierwsze oszacowanie $-50 < \Lambda$ otrzymali w 1988 roku G. Csordas, T.S. Norfolk i R.S. Varga [12]. Najlepszy wynik komputerowy należy do Y. Saouter i in. [13] i wynosi $\Lambda > -1.14541 \times 10^{-11}$. W dniu 19 stycznia 2018 roku w archiwum preprintów arXiv.org ukazała się praca Brada Rodgersa i Terence Tao [14] zawierająca analityczny dowód twierdzenia mówiącego, że stała de Bruijna–Newmana nie może być ujemna.

W 1901 roku H. von Koch udowodnił [15], że prawdziwość HR jest równoważna następującemu błędowi dla przybliżenia funkcji $\pi(x)$ przez logarytm całkowity

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(\sqrt{x} \log(x)). \quad (13)$$

Później Schoenfeld [16, Corollary 1] podał dokładną wartość stałej liczbowej ukrytej powyżej pod symbolem Big-O:

$$|\pi(x) - \text{Li}(x)| \leq \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \log(x) \text{ dla wszystkich } x \geq 2657. \quad (14)$$

W 2000 roku J.C. Lagarias [17] podał elementarne kryterium dla HR: HR jest równoważna spełnieniu poniższej nierówności dla wszystkich naturalnych n

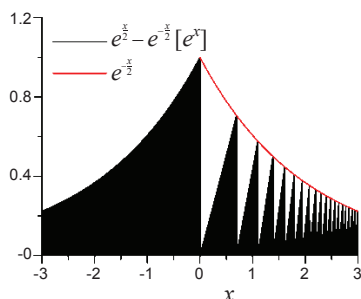
$$\sigma(n) \equiv \sum_{d|n} d \leq H_n + e^{H_n} \log(H_n), \quad (15)$$

gdzie $\sigma(n)$ jest sumą wszystkich dzielników n , a H_n jest n -tą liczbą harmoniczną $H_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$. Aby obalić HR, wystarczy znaleźć jedną wartość n , dla której powyższa nierówność będzie naruszona. Ponieważ nie jest łatwo wyliczyć H_n dla $n \sim 10^{100000}$ z dostateczną dokładnością, K. Briggs [18] rozpoczął sprawdzanie na komputerze podobnego kryterium dla HR podanego wcześniej przez G. Robina [19]:

$$\text{HR} \Leftrightarrow \sigma(n) < e^{\gamma} n \log \log(n) \quad \text{dla } n > 5040. \quad (16)$$

Dla niektórych n Briggs otrzymał dla różnicy między lewą a prawą stroną powyższej nierówności wartość rzędu 10^{-6} , a więc HR była bliska obaleniu. Przypomnijmy w tym miejscu słowa A. Odlyzki „[...] the Riemann Hypothesis, if true, is just barely true” wypowiedziane w [20] w kontekście stałej de Bruijna–Newmana.

Zauważmy, że przekonanie o prawdziwości HR nie jest powszechne. Kilku słynnych matematyków, m.in. J.E. Littlewood, P. Turán i A.M. Turing, nie wierzyło, że HR jest prawdziwa. A. Ivić podał kilka heurystycznych argumentów stawiających prawdziwość HR pod znakiem zapytania [21] (przedrukowany w [22, str. 137]), który nosił znamieny tytuł *O kilku powodach, aby wątpić w Hipotezę Riemanna*. Gdy znany popularyzator matematyki A.J. Derbyshire zapytał A.M. Odlyzko o jego opinię na temat słuszności HR, ten odpowiedział: „Either it’s true, or else it isn’t” (Albo jest prawdziwa, albo nie jest) [23, str. 389]. Na tej samej stronie można znaleźć argumenty Odlyzko za tym, że jest mało prawdopodobne znalezienie zera poza prostą krytyczną poniżej 10^{10000} .



4. Wykres funkcji występującej w całkowej reprezentacji (17) funkcji dzeta na prostej krytycznej.

Przejdziemy teraz do związków HR z fizyką. W roku 1947 holenderski fizyk B. van der Pol¹ zbudował urządzenie elektromechaniczne, które sporządzało wykres $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ [24]. Idea działania tego przyrządu była oparta na następującej reprezentacji:

$$\frac{\zeta(\frac{1}{2} + it)}{\frac{1}{2} + it} = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x/2} [e^x] - e^{x/2}) e^{-ixt} dx. \quad (17)$$

Tutaj $[\cdot]$ oznacza część całkowitą. Powyższe wyrażenie jest transformatą Fouriera funkcji $y(x) = e^{-x/2} [e^x] - e^{x/2}$. Wykres tej funkcji przedstawiono na rys. 4. Van der Pol wyciął nożyczkami kształt tej funkcji na obwodzie kartonowego koła. Strumień światła przechodził przez brzeg obracającego się dysku i trafiał do fotokomórki. Powstający w wyniku zjawiska fotoelektrycznego prąd był nałożony na

¹ Większość jego prac była poświęcona łączności radiowej i telewizji. To on w 1920 roku wprowadził równanie różniczkowe opisujące drgania nieliniowego oscylatora, obecnie nazywanego oscylatorem van der Pola.

prąd o zmiennej częstotliwości, co pozwalało w analogowy sposób wykonać transformatę Fouriera. W rezultacie van der Pol otrzymał wykres modułu $|\zeta(\frac{1}{2} + it)/(\frac{1}{2} + it)|$, na którym położenie pierwszych 29 nietrywialnych zer dzety można było zlokalizować z dokładnością lepszą niż 1%. Był to niewątpliwie klejnot analogowej techniki obliczeniowej.

Pierwsza jakościowa sugestia mająca doprowadzić do udowodnienia HR metodami fizycznymi została przedstawiona w 1914 roku przez George'a Pólya w trakcie rozmowy z Edmundem Landauem, który zapytał Pólya: Znasz trochę fizykę. Czy jest jakiś fizyczny powód, dla którego HR miałyby być prawdziwa? Pólya odpowiedział, że byłoby tak wtedy, gdyby HR dało się powiązać z takim fizycznym problemem, którego wartości własne byłyby rzeczywiste i odpowiadałyby nietrywialnym zerom dzety. Cała ta historia opisana jest w korespondencji Odlyzki z 95-letnim wówczas Pólyą i udostępniona na witrynie internetowej [25]. Należy podkreślić, że rozmowa ta odbyła się wiele lat przed powstaniem mechaniki kwantowej i pojawieniem się równania Schrödingera na poziomy energetyczne. Prawdopodobnie Pólya został zainspirowany przez prace Weyla [26] z lat 1911–1912 o rozkładzie wartości własnych laplasjanów określonych na zwartych obszarach, w szczególności o drganiach własnych bębnow (słynny problem „Czy można usłyszeć kształt bębna?”, [27]). Później podobny pomysł miał przedstawić D. Hilbert i obecnie używa się zwrotu „przypuszczenie Hilberta-Pólya” [25]. Jeżeli HR jest prawdziwa, wtedy można nietrywialne zera uporządkować zgodnie z rosnącą wartością części urojonej i próbować przyporządkować je w sposób wzajemnie jednoznaczny wartościom własnym pewnego operatora hermitowskiego – wszystkie wartości własne takich operatorów są – na mocy matematycznego twierdzenia – rzeczywiste. Trzeba więc znaleźć kwantowy układ fizyczny opisany hamiltonianem o poziomach energetycznych $E_n = \gamma_n$. Symbolicznie podejście Pólya-Hilberta można zapisać w postaci $\zeta(\frac{1}{2} + i\hat{H}) = 0$, gdzie operator $\hat{H}$ jest samosprężony $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$, a symbol † oznacza sprzężenie hermitowskie: jeżeli w przestrzeni Hilberta, w której działa operator $\hat{A}$, zadany jest iloczyn skalarny $(\cdot, \cdot)$, to $(\hat{A}^\dagger x, y) = (x, \hat{A}y)$ dla wszystkich wektorów x, y z dziedziny $\hat{A}$. W mechanice kwantowej wartości energii E_n jakiegoś układu kwantowego otrzymuje się, rozwiązując równanie Schrödingera bez czasu, czyli zagadnienie na wartości własne postaci (gdy nie ma degeneracji)

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n, \quad (18)$$

gdzie operator $\hat{H}$ jest nazywany hamiltonianem badanego układu (klasycznie jest sumą energii kinetycznej i energii oddziaływania), a ψ_n jest funkcją stanu („funkcją falową”) układu mającego energię E_n .

Około roku 1971 Hugh Montgomery postawił pytanie: czego można się dowiedzieć o odstępach między nietrywialnymi zerami $\zeta(s)$, zakładając HR. Rezultat tych badań ukazał się w roku 1973 [28]. W szczególności w pracy tej sformułował on przypuszczenie, że funkcja korelacyjna urojonych części zer dzety ma postać (tutaj liczby $0 < \alpha < \beta < \infty$ są ustalone):

$$\sum_{\substack{0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \frac{2\pi\alpha}{\log t} \leq \gamma - \gamma' \leq \frac{2\pi\beta}{\log T}}} 1 \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right) du, \quad \text{gdzie } T \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Wiosną 1972 roku Montgomery odwiedził Instytut Studiów Zaawansowanych w Princeton. Hinduski matematyk Sarvadaman D.S. Chowla, który urodził się w Londynie, zmusił nieśmiałego Montgomery’ego do przedstawienia rezultatów jego badań sławnemu fizykowi Freemanowi Dysonowi. Opis tego zdarzenia można znaleźć w wielu książkach, np. [29, str. 134–136], [23, str. 316–318], [30, str. 263–264]. Dyson natychmiast rozpoznał we wzorze (19) tę samą postać, którą otrzymał na początku lat sześćdziesiątych jako funkcję korelacyjną wartości własnych losowych macierzy z unitarnego zespołu gaussowskiego. Dyson był autorem cyklu prac o statystycznej teorii poziomów energetycznych złożonych układów modelowanych za pomocą macierzy losowych [31], [32]. Współautorem dwóch ostatnich prac był Madan L. Mehta, który później napisał blisko 700-stronicową „biblię” o macierzach losowych [33]. W fizyce macierze losowe pojawiły się w celu opisanego własności ciężkich jąder atomowych. Widma lekkich atomów (np. wodoru – przypadek ściśle rozwiązywalny) są proste i regularne, natomiast widma ciężkich atomów, takich jak np. ^{238}U , są skomplikowane i rozłożone „chaotycznie”. Nieznane są hamiltoniany oddziaływań w jądrach takich ciężkich atomów, zresztą fizyka układów wielu ciał oparta jest na metodach przybliżonych. Na początku lat pięćdziesiątych ubiegłego wieku przy niektórych reaktorach atomowych kilka grup badawczych rozpoczęło wyznaczanie poziomów energetycznych jąder uranu, bardzo dobre przedstawienie historii tych pomiarów można znaleźć w [34]. W pewnych przypadkach udało się wyznaczyć od kilkuset do ponad tysiąca poziomów. Stwierdzono brak energii leżących blisko siebie, zjawisko to nazwano odpychaniem poziomów.

W przypadku skończenie wymiarowym (18) jest układem równań jednorodnych na współrzędne wektora ψ_n w jakiejś bazie i aby otrzymać niezerowe wektory własne, wyznacznik układu równań (18) musi zniknąć, więc wartości własne λ_n są rzeczywistymi (bo operator hermitowski ma rzeczywiste wartości własne) rozwiązaniami równania charakterystycznego $\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0$ – wielomianu stopnia równego rozmiarowi przestrzeni Hilberta, w której działa operator $\hat{H}$. Ponieważ nie znamy hamiltonianu dla jąder ciężkich atomów, w latach pięćdziesiątych ubiegłego wieku Eugene Wigner zaproponował, aby do ich opisu używać macierzy dużego wymiaru o losowych elementach wybranych z odpowiednim rozkładem prawdopodobieństwa. Konkretnie oznacza to, że jeżeli $\mathbf{M}$ jest macierzą kwadratową $N \times N$ o elementach M_{ij} , to prawdopodobieństwo $P(M_{ij} \in (a, b))$ tego, że element macierzowy M_{ij} przyjmie wartość w przedziale (a, b) , dane jest całką:

$$P(M_{ij} \in (a, b)) = \int_a^b f_{ij}(x) dx,$$

gdzie f_{ij} jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa, przy czym elementy M_{ij} są statystycznie wzajemnie niezależne, co oznacza, że prawdopodobieństwo dla całej macierzy jest iloczynem powyższych czynników dla pojedynczych elementów M_{ij} . Jednak w zastosowaniach fizycznych macierz ma reprezentować mierzalne rzeczywiste wielkości i dlatego $\mathbf{M}$ musi być samosprzężona („hermitowska”): $\mathbf{M}^\dagger = \mathbf{M}$, czyli elementy macierzowe muszą spełniać $M_{ij} = M_{ji}^*$ i wystarczy wylosować tylko elementy na diagonalu i np. nad nią. Wybór bazy, w której reprezentowany jest hamiltonian, jest sprawą dowolną i zmiana bazy opisanej macierzą unitarną $\hat{U}$, $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \mathbb{I}$ oznacza przekształcenie podobieństwa $\hat{U}^{-1} \hat{H} \hat{U} = \hat{H}'$. Dodatkowo prawdopodobieństwa wylosowania macierzy powiązanych transformacją podobieństwa (tzn. te same operacje zapisane w różnych bazach) muszą być takie same: $P(\hat{U}^{-1} \hat{H} \hat{U}) = P(\hat{H})$. Warunki te wyznaczają postać prawdopodobieństwa wylosowania macierzy $\mathbf{H}$, zob. [33, Tw 2.6.3, str. 47]:

$$P(\mathbf{H}) = e^{-a \text{tr } H^2 + b \text{tr } H + c}, \quad (20)$$

gdzie a jest dodatnią liczbą rzeczywistą, b i c są rzeczywiste oraz tr oznacza ślad macierzy: $\text{tr } \mathbf{M} = \sum_{i=1}^N M_{ii}$. Wartość stałej c wyznacza warunek unormowania prawdopodobieństwa. Dla macierzy samosprzężonej (= hermi-

towskiej) $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}$ mamy $\text{tr } H^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N H_{ik} H_{ki} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N H_{ik} H_{ik}^* = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N |H_{ik}|^2$ i wszystkie wyrazy w (20) mają postać gaussowską. Ponieważ eksponenta sumy czynników jest iloczynem, eksponent od każdego czynnika oddzielnie, prawa strona równania (20), istotnie ma postać iloczynu gęstości rozkładów normalnych Gaussa, dlatego taki zespół macierzy losowych nazywa się unitarnym zespołem gaussowskim, po angielsku *Gaussian Unitary Ensemble* i w skrócie GUE. Rozważa się także zespoły ortogonalne gaussowskie GOE (macierze są rzeczywiste oraz symetryczne i dlatego zmiana bazy opisana jest macierzą ortogonalną) oraz symplektyczne zespoły gaussowskie GSE. Podkreślimy, że czynniki gaussowskie otrzymuje się z żądania niezmienniczości prawdopodobieństw wylosowania macierzy względem odpowiednich transformacji podobieństwa macierzy hermitowskich lub symetrycznych. Te różne zespoły macierzy losowych związane są z symetriami układów fizycznych: GOE opisuje układy niezmiennicze względem odbicia czasu, a GUE stosuje się do układów łamiących symetrię odbicia czasu. Wartości własne takich macierzy nie są czysto losowe: przeskalowane (ang. *unfolded*) odstęp s między nimi nie są opisane przez rozkład Poissona e^{-s} , lecz np. dla zespołu GUE przez wzór:

$$P(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 e^{-4s^2/\pi}. \quad (21)$$

Przeskalowanie (*unfolding*) oznacza pozbycie się stałego trendu w widmie $E_1, E_2, \dots$, tzn. podzielenie $d_n = E_{n+1} - E_n$ przez średni odstęp między poziomami $\bar{d}(E) : s_n = (E_{n+1} - E_n)/\bar{d}(E)$. Dla zer $\zeta(s)$ na mocy wzoru (9) oznacza to przejście od różnic $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ do zmiennej $s_n = (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \log(\gamma_n)/2\pi$. Na rysunku 5 pokazano porównanie (21) z realnymi odstępami dla zer $\zeta(s)$.

Przez kilka lat ujawniony w czasie krótkiej rozmowy Montgomery'ego z Dysonem związek nietrywialnych zer $\zeta(s)$ z wartościami własnymi macierzy GUE nie wzbudzał dużego zainteresowania. W latach osiemdziesiątych Andrew Odlyzko rozpoczął sprawdzanie przypuszczenia (19) za pomocą superkomputerów Cray-1 i Cray X-MP. Wyniki tych obliczeń ukazały się w 1987 roku w pracy [35] i z grubsza potwierdzały (19). Małe rozbieżności zanikają bardzo wolno z posuwaniem się po prostej krytycznej i Odlyzko kontynuował obliczenia na coraz szybszych komputerach i coraz dalej na prostej krytycznej $\Re[s] = \frac{1}{2}$ w różnych prze-

działach wokół zera $n = 10^{20}$ [36], następnie wokół $\gamma_{10^{21}}$ [37] i na koniec przy zerze o $n = 10^{22}$ [38]. Te empiryczne dane, zob. rys. 6, potwierdziły słuszność przypuszczenia, że urojone części kolejnych nietrywialnych zer $\zeta(s)$ wykazują takie samo zachowanie jak różnice między parami wartości własnych losowych macierzy z rozkładem GUE. Dopiero doświadczalne potwierdzenie przypuszczenia Montgomery'ego (19) spowodowało gwałtowny wzrost zainteresowania związkami między zerami dzety Riemanna a wartościami własnymi losowych macierzy. W [39, str. 146] P. Sarnak napisał: „Na poziomie fenomenologicznym to jest chyba najbardziej zdumiewające odkrycie dotyczące dzety od czasów Riemanna”. W ten sposób mało konkretna hipoteza Hilberta–Pólya zyskała wiarygodność i teraz wiadomo, że układ fizyczny odpowiadający $\zeta(s)$ musi łamać symetrię względem odwrócenia czasu. Na konferencji „Quantum chaos and statistical nuclear physics”, która odbyła się w styczniu 1986 roku w Mexico City, Michael Berry wygłosił wykład *Riemann's zeta function: a model for quantum chaos?* [40]. Stał się on manifestem dla tych, którzy chcą udowodnić HR, znajdując odpowiedni operator $\hat{H}_R$ taki, że $\hat{H}_R|\Psi_k\rangle = \gamma_k|\Psi_k\rangle$. Ten hipotetyczny układ kwantowy (abstrakcyjny „pierwiastek”, którego jądro posiada poziomy energetyczny pokrywający się z γ_n) został nazwany przez O. Bohigasa „Riemannium”, zob. [41, 42], analogicznie do mionium, czyli atomu zbudowanego z antymionu i elektronu albo pozytonium: układu złożonego z elektronu e^- i pozytonu e^+ , czyli antyelektronu. Dodatkowo w [40] Berry argumentował, że $\hat{H}_R$ powinien mieć klasyczną granicę, w której wszystkie orbity są chaotyczne.

W roku 1998 ukazała się praca S. Okubo[43] zatytułowana *Lorentz-Invariant Hamiltonian and Riemann Hypothesis*. Nie jest to dokładnie realizacja pomysłu Pólya i Hilberta: występujący w tej pracy dwuwymiarowy operator różniczkowy (hamiltonian):

$$\hat{H} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + i\beta y \frac{\partial}{\partial y} + i(1 - \beta)x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2}, \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (22)$$

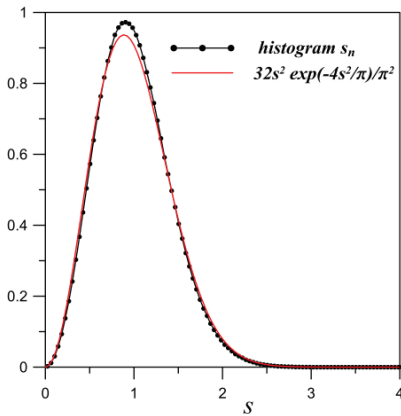
nie posiada jako wartości własne γ_n . Zamiast tego zera dzety występują w specjalnym warunku brzegowym na rozwiązania równania Schrödingera z hamiltonianem (22). Jednak rozwiązania tego równania nie są normalizowalne w naturalnym iloczynie skalarnym.

Rok później M. Berry i J. Keating w pracy [44] zaproponowali inny operator: $\hat{H}_{BK} = \hat{x}\hat{p}$, tzn. iloczyn operatora położenia $\hat{x} = x$ i pędu $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$,

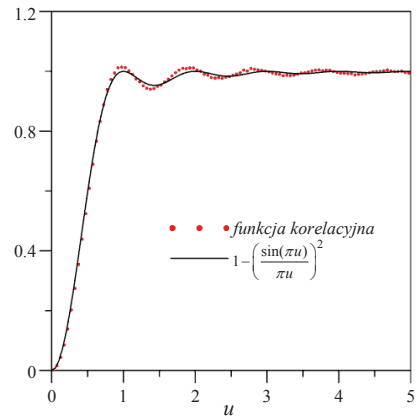
gdzie $\hbar = 1.055 \dots \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ jest stałą Plancka. Głównym argumentem za tym był wzór na liczbę poziomów o energii mniejszej niż E :

$$N(E) = \frac{E}{2\pi} \left(\log \left(\frac{E}{2\pi} \right) - 1 \right) + \frac{7}{8} + \dots,$$

który dokładnie pokrywa się ze wzorem (9), ale nie było dowodu na to, że wartości $E_n = \gamma_n$. Zauważmy, że znany jest specjalny rodzaj bilardu, dla którego formuła dająca liczbę wartości energii mniejszej od E ma wiodące człony dokładnie takie same, jak w (9), jednak dalsze wyrazy się różnią [45, wzory (34–35)]. Przypomnijmy, że dwa bębny mogą mieć różne kształty, ale takie same widmo wibracji, a więc także takie same funkcje zliczające poziomy $< E$. W roku 2011 S. Endres and F. Steiner [46] wykazali, że widmo $\hat{H}_R = \hat{x}\hat{p}$ na dodatniej osi x jest ciągłe, a zatem $\hat{H}_R = x\hat{p}$ nie może być operatorem Hilberta–Pólya, zob. także serię prac G. Sierry, n.p. [47, 48], gdzie rozważano pewne modyfikacje $\hat{H}_R = \hat{x}\hat{p}$.



5. Histogram znormalizowanych odstępów między kolejnymi zerami dzęty otrzymany dla 5 000 000 zer. Punkty reprezentujące te odstęp są odległe o $\Delta s = 0.05$.



6. Wykres ilustruje przypuszczenie (19) Montgomery’ego dla 5 000 000 zer dzęty. Punkty reprezentujące funkcję korelacyjną były wyliczone ze wzoru po lewej stronie (19) dla 5 000 000 pierwszych zer $\zeta(s)$ i są odległe o $\Delta u = 0.05$.

Wiosną 2017 roku w Physical Review Letters, najwyżej punktowanym czasopiśmie fizycznym, ukazała się praca C.M. Bendera, D.C. Dorje i

M.P. Müllera *Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function* [49], najwierniej realizująca ideę Pólya i Hilberta. Nielokalny operator

$$\hat{H}_{\text{BBM}} = \frac{1}{1 - e^{-\hat{p}}} (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})(1 - e^{-\hat{p}}) \quad (23)$$

gra rolę hamiltonianu. Widzimy, że $\hat{H}_{\text{BBM}}$ jest otrzymany z powyższego hamiltonianu Berry–Keatinga $\hat{H}_{\text{BK}}$ za pomocą transformacji podobieństwa. Funkcje własne są dane przez funkcję dzeta Hurwitza zdefiniowaną dla $\Re(s) > 1$ i $q \neq -1, -2, -3, \dots$ przez

$$\zeta(s, q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q+n)^s}. \quad (24)$$

Widać, że funkcja dzeta Riemanna jest specjalnym przypadkiem: $\zeta(s) = \zeta(s, 0)$. Funkcja dana przez powyższy szereg (24) ma przedłużenie analityczne na całą płaszczyznę zespoloną bez punktu $s = 1$ dane przez całkę (por. (3))

$$\zeta(s, q) = \Gamma(1-s) \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^{s-1} e^{qt}}{1 - e^{-t}} dt,$$

gdzie C oznacza kontur całkowania Hankela, taki jak w równaniu (3). Autorzy [49] pokazują następnie, że $\psi_s(x) = -\zeta(s, x+1)$ spełnia równanie na wartości własne $\hat{H}_{\text{BBM}}\psi_s(x) = i(2s-1)\psi_s(x)$. Tak więc warunek brzegowy $\psi_s(0) = 0 = \zeta(s, 0) = \zeta(s)$ implikuje, że s są zerami funkcji dzeta Riemanna, jeżeli HR jest spełniona. Należy „tylko” pokazać, że $\hat{H}_{\text{BBM}}$ jest hermitowski. Niestety nie zachodzi to dla zwykłego iloczynu skalarnego w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem. Autorzy [49] wprowadzają inny iloczyn skalarny, względem którego $\hat{H}_{\text{BBM}}$ jest hermitowski, jednak teraz w tym iloczynie skalarnym funkcje własne mają nieskończoną normę.

W sierpniu 1998 roku podczas konferencji w Seattle poświęconej 100-leciu twierdzenia o liczbach pierwszych P. Sarnak zaoferował butelkę dobrego wina dla fizyków, którzy z prawa Montgomery’ego–Odlyzki potrafią otrzymać informacje nieznane wcześniej matematikom. Już dwa lata później musiał pójść do sklepu po obiecane wino. Na konferencji w Wiedniu we wrześniu 1998 roku Jonathan Keating wygłosił wykład, podczas którego podał rozwiązanie (ale nie dowód) tzw. problemu momentów dzeta. Wyniki te ukazały się we wspólnej pracy z jego

doktorantką Niną Snaith [50]. Od blisko stu lat matematycy starali się wyliczyć momenty funkcji dzeta na prostej krytycznej

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^{2k} dt, \quad \text{gd}y \ T \rightarrow \infty \quad (25)$$

G.H. Hardy i J.E. Littlewood blisko sto lat temu [51, Tw. 2.41] wyliczyli drugi moment:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt \sim \log(T), \quad \text{gd}y \ T \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Czwarty moment wyliczył A.E. Ingham w 1926 roku [52, Tw. B]

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^4 dt \sim \frac{1}{2\pi} \log^4(T), \quad \text{gd}y \ T \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Wyższych momentów, mimo wielu wysiłków, nie udało się wyliczyć, ale znana była przypuszczalna postać dla $k = 3$ [53]:

$$\int_1^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^6 dt \sim \frac{42}{9!} \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^4 \left(1 + \frac{4}{p} + \frac{1}{p^2}\right) \right\} T \log^9 T \quad \text{dla dużych } T, \quad (28)$$

a także jeszcze bardziej skomplikowane wyrażenie dla $k = 4$ [54]: dla dużych T zachodzi

$$\int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^8 dt \sim \frac{24024}{16!} \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^9 \left(1 + \frac{9}{p} + \frac{9}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right) \right\} T \log^{16} T. \quad (29)$$

Keating i Snaith udowodnili ogólne twierdzenie o momentach losowych macierzy, których wartości własne mają rozkład GUE i jeżeli zachowanie $\zeta(s)$ jest modelowane przez wyznacznik takich macierzy, to ich wynik zastosowany do dzety daje

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^{2k} dt \sim f_{ka}(k) (\log T)^{k^2}, \quad (30)$$

gdzie

$$a(k) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(m+k)}{m! \Gamma(k)}\right)^2 p^{-m}, \quad (31)$$

a liczby f_k są dane wzorem:

$$f_k = \frac{G^2(k+1)}{G(2k+1)}.$$

W powyższym wzorze $G(\cdot)$ jest funkcją Barnes'a spełniającą rekurencję $G(z+1) = \Gamma(z)G(z)$, czyli dla naturalnych argumentów funkcja ta jest „silnią po silniach”: $G(n) = 1! \cdot 2! \cdot 3! \dots (n-2)!$. Oczywiście wynik Keatinga i Snaith daje wzory (26)–(29) odpowiednio dla $k = 1, 2, 3$ i 4.

Od kilku lat rozwijana jest idea kwantowych komputerów. Odkrycie przez Petera Shora kwantowego algorytmu faktoryzacji [55] pokazało, że klasyczne problemy o dużej złożoności mogą zostać znacznie przyspieszone (przynajmniej w teorii) z pomocą komputerów kwantowych. Czy jest możliwe zaprojektowanie kwantowego komputera weryfikującego HR? Mamy tutaj na myśli coś bardziej pomysłowego niż np. połączenie algorytmu Shora z kryterium Lagarias'a. W roku 2013 pojawiła się praca [56], w której autorzy (zakładając HR) skonstruowali unitarny operator z wartościami własnymi równymi kombinacji nietrywialnych zer dzety ρ_j^*/ρ_j – takie kombinacje leżą oczywiście na kole jednostkowym. Następnie skonstruowali oni kwantowy układ realizujący tę unitarną macierz. Inny kwantowy komputer weryfikujący HR został zaproponowany w [57, Sect. IIC]. Jego działanie oparte jest na kwantowym obliczaniu ilości liczb pierwszych mniejszych niż x , zaproponowanym przez tych samych autorów w [58], i szukaniu naruszenia nierówności (14). Dodajmy, że w podobny sposób Latorre i Sierra proponują szukać liczbę Skewesa [57, Sect. IID]. Niedawno ukazała się praca [59], w której zaproponowano doświadczalną realizację $\zeta(s)$ za pomocą chłodnych atomów.

W pracy [60] M. Shlesinger badał specjalny 1-wymiarowy ruch losowy tak zdefiniowany, aby mógł być powiązany z HR. Prawdopodobieństwo skoku do węzła odległego o $\pm l$ kroków wyraża się jawnie przez funkcję Möbiusa:

$$p(\pm l) = \frac{1}{2} C \left(\frac{1}{l^{1+\beta}} \pm \frac{\mu(l)}{l^{1+\beta-\epsilon}} \right), \quad \beta > 0,$$

gdzie $C = \frac{1}{\zeta(1+\beta) + \frac{1}{\zeta(1+\beta)}}$ jest czynnikiem normalizacyjnym. Takie błędzenie losowe Shlesinger nazwał ruchem losowym „Riemanna–Möbiusa”. Pewne ogólne własności tzw. funkcji struktury $\lambda(k)$, która jest transformatą Fouriera prawdopodobieństw $p(l)$: $\lambda(k) = \sum_l e^{ikl} p(l)$, pozwoliły Shlesingerowi zlokalizować zespolone zera dzety wewnątrz pasa krytycznego, jednak wyniku J. Hadamarda i Ch.J. de la Vallée–Poussina $\zeta(1 + it) \neq 0$ nie udało się otrzymać tą metodą. Ciekawe, że istnienie zer poza prostą krytyczną nie jest sprzeczne z zachowaniem $\lambda(k)$, wynikającym z ogólnych zasad prawdopodobieństwa.

W pracy [61] podana została stochastyczna interpretacja funkcji dzeta. Istnieje wiele innych związków HR z ruchami losowym lub ruchami Browna, w pracy [62] można znaleźć obszerny przegląd rezultatów wyrażających wartości oczekiwane różnych zmiennych losowych przez $\zeta(s)$.

Równanie funkcyjne (5) może być zapisane w niesymetrycznej postaci:

$$2\Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) \zeta(s) = (2\pi)^s \zeta(1-s).$$

Ta postać jest podobna do relacji dualności Kramersa–Wanniera [63] dla sumy stanów $Z(J)$ dwuwymiarowego modelu Isinga z parametrem J wyrażonym w jednostkach kT :

$$Z(J) = 2^N (\cosh(J))^{2N} (\tanh(J))^N Z(\tilde{J}), \quad (32)$$

gdzie N oznacza liczbę spinów, a $\tilde{J}$ jest związana z J relacją $e^{-2\tilde{J}} = \tanh(J)$, por. np. [64]. Suma statystyczna $Z(\beta)$ jest podstawową wielkością używaną w fizyce statystycznej, tutaj $\beta = 1/k_B T$, gdzie $k_B = 1.3806488 \dots \times 10^{-23} [\text{J/K}]$ jest stałą Boltzmanna, a T jest temperaturą bezwzględną. Pozostałe funkcje termodynamiczne (energia całkowita, energia swobodna, entropia, ciśnienie itd.) mogą być wyrażone jako jej pochodne. Dla układu wymieniającego ciepło z otoczeniem przy ustalonej liczbie cząstek, temperaturze i objętości, mogącego się znajdować w mikrostanach o energiach E_n , jest ona zdefiniowana wzorem:

$$Z(\beta) = \sum_n e^{-\beta E_n}. \quad (33)$$

Przejścia fazowe, tzn. nieciągłości różnych wielkości wyrażonych przez pochodne sumy stanów, występują tam, gdzie $Z(\beta) = 0$. Z powyższej de-

finicji widać jednak, że sumy stanów nie mają zer dla rzeczywistych temperatur, dopiero przedłużone analitycznie na całą płaszczyznę zespoloną mają zera zespolone leżące na okręgu. Jedynie w granicy termodynamicznej $N \rightarrow \infty$ zespolone zera mają punkt skupienia przy rzeczywistej wartości temperatury. Pierwsze tego typu twierdzenia udowodnili C.N. Yang i T.D. Lee [65, 66]. W języku polskim można się zapoznać z teorią Yanga–Lee w [67, str. 351–354]. Ponieważ te twierdzenia „kołowe” ograniczają położenie zer, nasuwa się pomysł zastosowania ich do HR. Aby kontynuować tę analogię, trzeba znaleźć układ, którego suma stanów będzie wyrażona przez $\zeta(s)$. Wtedy można mieć nadzieję udowodnienia HR, powołując się na twierdzenie Lee–Yanga. Twierdzenie to dotyczy przejść fazowych układów spinowych w zewnętrznym polu magnetycznym, zob. praca przeglądowa [68]. M. Fisher [69] z kolei rozpoczął szukanie zer sumy stanów na zespolonej płaszczyźnie temperatury i także okazało się, że dla specjalnego układu Isinga zanurzonego w polu magnetycznym zera kanonicznej sumy stanów również leżą na okręgu jednostkowym, tym razem na zespolonej płaszczyźnie zmiennej $v = \sinh(2J\beta)$, gdzie $J > 0$ jest stałą sprzężenia z polem magnetycznym. Prosta krytyczna $s = \frac{1}{2} + it$ może być odwzorowana na okrąg jednostkowy za pomocą transformacji $s \rightarrow u = s/(1-s) = (\frac{1}{2} + it)/(\frac{1}{2} - it)$, wtedy $|u| = 1$. Tak więc przez dobór odpowiedniego układu spinowego z sumą stanów $Z(\beta)$ wyrażoną przez $\zeta(s)$ można się starać udowodnić HR, powołując się na twierdzenie Lee–Yanga.

W serii prac A. Knauf [70] podjął powyżej opisany plan zaatakowania HR. W tych pracach wprowadził on układ spinowy z sumą stanów wyrażoną w granicy termodynamicznej przez funkcję dzeta: $Z(s) = \zeta(s-1)/\zeta(s)$ ze zmienną s interpretowaną jako odwrotność temperatury. Jednakże postać oddziaływania między spinami w tym modelu nie należy do klasy, do której stosują się twierdzenia „kołowe”. Ta idea była dalej podjęta w pracy [71]. Autorzy pracy [72] udowodnili, że HR jest równoważna nierównościom spełnianym przez stany Kubo–Martina–Schwingera w dynamicznym układzie kwantowym Bosta i Connesa rozważanym w odpowiednim zakresie temperatur. Funkcja $\zeta(s)$ występuje w wielu innych miejscach: w teorii bozonów i fermionów, teorii kondensatu Bosego–Einsteina condensate, zob. np. [73, rozdz. III E].

W 2005 roku w prestiżowym *Physical Review Letters* ukazał się artykuł [74], w którym L.A. Bunimovich oraz C.P. Dettmann rozważali

punktową cząstkę odbijającą się w kołowym bilardzie, na obwodzie którego zrobiono mały otwór, widziany ze środka okręgu pod kątem ϵ . Niech $P_1(t)$ oznacza prawdopodobieństwo, że kulka nie wypadnie poza bilard z jednym otworem do czasu t . Bunimovich i Dettmann otrzymali dokładny wzór na $P_1(t)$ wyrażony przez $\zeta(s)$ i pokazali, że HR jest równoważna temu, że

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon^\delta (tP_1(t) - 2/\epsilon) = 0 \quad (34)$$

będzie zachodzić dla każdego $\delta > -1/2$. Wartość $1/2$ jest wprost związana z położeniem zer dzety na prostej $\Re[s] = \frac{1}{2}$. Bardziej skomplikowany wzór Bunimovich i Dettmann otrzymali dla bilardu z dwoma otworami. W zasadzie możliwe jest przeprowadzenie doświadczeń weryfikujących (34) za pomocą wnek mikrofalowych lub bilardów zbudowanych z mikrolaserów. Takie doświadczenia mogą obalić HR, gdyby się okazało, że zachowanie różnicy $tP_1(t) - 2/\epsilon$ w granicy, gdy rozmiar otworu $\epsilon \rightarrow 0$ będzie wolniejsze niż $\epsilon^{1/2}$.

W książce [30, str. p.286] (fragment dostępny pod adresem <http://tinyurl.com/yd5cvqu2>) opisana jest wizyta Jona Keatinga w bibliotece w Getyndze, gdzie przechowywane są notatki Riemanna. Keating chciał obejrzeć rachunki związane z HR oraz z pewnym problemem z hydrodynamiki. Spodziewał się, że dostanie dwa pudła, a bibliotekarz przyniósł mu jedną paczkę notatek. Okazało się, że Riemann w tym samym czasie pracował nad rozmieszczeniem liczb pierwszych oraz stabilnością obracającej się cieczy o kształcie kuli. Problem stabilności cieczy zależał od tego, czy pewne liczby leżą na płaszczyźnie zespolonej dokładnie na prostej równoległej do osi urojonej. Być może ten fakt z fizyki pomógł Riemannowi sformułować jego słynną hipotezę?

Dziękuję Profesorowi Krzysztofowi Maślance za przeczytanie manuskryptu i szereg uwag oraz udostępnienie rysunku 3.

Literatura

- [1] B. Riemann, "Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grösse," *Monatsberichte der Berliner Akademie*, pp. 671–680, November 1859. English translation available at <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann>.

- [2] M. Milgram, "Integral and Series Representations of Riemann's Zeta Function and Dirichlet's Eta Function and a Medley of Related Results," *Journal of Mathematics*, vol. 2013, p. Article ID 181724, 2013.
- [3] J. P. Gram, "Note sur les zéros de la fonction de Riemann," *Acta Math.*, vol. 27, pp. 289–304, 1903.
- [4] A. M. Turing, "Some calculations of the Riemann zeta-function," *Proc. London Math. Soc.* (3), vol. 3, pp. 99–117, 1953.
- [5] S. Wedeniwski, "Zetagrid Project." <http://think-automobility.org/geek-stuff/zetagrid>.
- [6] K. Broughan, *Equivalents of the Riemann Hypothesis*, vol. 1 and 2. Cambridge University Press, 2017.
- [7] A. M. Odlyzko and H. J. J. te Riele, "Disproof of the Mertens Conjecture," *J. Reine Angew. Math.*, vol. 357, pp. 138–160, 1985.
- [8] T. Kotnik and H. te Riele, "The Mertens conjecture revisited," in *7-th ANTS*, vol. 4076 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 156–167, 2006.
- [9] G. Pólya, *Jak to rozwiązać?* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2011.
- [10] N. de Bruijn, "The roots of trigonometric integrals," *Duke Math. J.*, vol. 17, no. 3, pp. 197–226, 1950.
- [11] C. M. Newman, "Fourier transforms with only real zeros," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 61, no. 2, pp. 245–251, 1976.
- [12] G. Csordas, T. S. Norfolk, and R. S. Varga, "A lower bound for the de Bruijn-Newman constant Λ^* " *Numerische Mathematik*, vol. 52, 1988.
- [13] Y. Saouter, X. Gourdon, and P. Demichel, "An improved lower bound for the de Bruijn-Newman constant," *Mathematics of Computation*, vol. 80, pp. 2281–2287, 2011.
- [14] B. Rodgers and T. Tao, "The De Bruijn-Newman constant is non-negative," *math.NT/1801.05914*, Jan. 2018.
- [15] H. von Koch, "Sur la distribution des nombres premiers," *Acta Math.*, vol. 24, pp. 159–182, 1901.
- [16] L. Schoenfeld, "Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II," *Mathematics of Computation*, pp. 337–360, 1976.
- [17] J. C. Lagarias, "An elementary problem equivalent to the Riemann Hypothesis," *Amer. Math. Monthly*, vol. 109, pp. 534–543, 2002.
- [18] K. Briggs, "Abundant Numbers and the Riemann Hypothesis," *Experimental Mathematics*, vol. 15, Number 2, pp. 251–256, 2006.
- [19] G. Robin, "Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et Hypothèse de Riemann," *J. Math. Pures Appl.* (9), vol. 63, no. 2, pp. 187–213, 1984.
- [20] A. M. Odlyzko, "An improved bound for the de Bruijn–Newman constant," *Numerical Algorithms*, vol. 25, no. 1, pp. 293–303, 2000.
- [21] A. Ivič, "On some reasons for doubting the Riemann hypothesis," *arXiv:math/0311162*, Nov. 2003.

- [22] P. Borwein, S. Choi, B. Rooney, and A. Weirathmueller, *The Riemann Hypothesis: A Resource For The Afficionado And Virtuoso Alike*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.
- [23] J. Derbyshire, *Obsesja liczb pierwszych*. Poznań: NAKOM, 2009.
- [24] B. Van der Pol, "An Electro-Mechanical Investigation Of The Riemann Zeta Function In The Critical Strip," *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 53, pp. 976–981, 1947.
- [25] Korespondencja o początkach przypuszczenia Hilberta–Pólya na stronie www A. Odlyzko. <http://www.dtc.umn.edu/odlyzko/polya/index.html>.
- [26] H. Weyl, "Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte," *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. 2, pp. 110–117, 1911.
- [27] M. Kac, "Can one hear the shape of a drum?," *The American Mathematical Monthly*, vol. 73, no. 4, pp. pp. 1–23, 1966.
- [28] H. L. Montgomery, "The pair correlation of zeros of the zeta function," in *Analytic Number Theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, MO., 1972)*, pp. 181–193, Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1973.
- [29] K. Sabbagh, *The Riemann hypothesis : the greatest unsolved problem in mathematics*. New York: Farrar, Straus, and Giroux, 2002.
- [30] M. Sautoy, *The music of the primes: searching to solve the greatest mystery in mathematics*. New York: HarperCollins, 2003.
- [31] F. J. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems. I, II, III. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):140–156, 157–165, 166–175, 1962. *Journal of Mathematical Physics*, 4(5):713–719, 1963. pp. 701–712, 1963.
- [32] M. L. Mehta and F. J. Dyson, "Statistical theory of the energy levels of complex systems. IV, V," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, no. 5, pp. 701–712, 1963. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, no. 5, pp. 713–719, 1963.
- [33] M. L. Mehta, *Random Matrices*. San Diego, California: Academic Press, second ed., 1991.
- [34] F. W. K. Firk and S. J. Miller, "Nuclei, primes and the random matrix connection," *Symmetry*, vol. 1, no. 1, pp. 64–105, 2009.
- [35] A. M. Odlyzko, "On the distribution of spacings between zeros of the zeta function," *Math. Comp.*, vol. 48, pp. 273–308, 1987.
- [36] A. M. Odlyzko, "The 10^{20} -th zero of the Riemann zeta function and 175 million of its neighbors." 1992 revision of 1989 manuscript.
- [37] A. M. Odlyzko, "The 10^{21} -st zero of the Riemann zeta function." Nov. 1998 note for the informal proceedings of the Sept. 1998 conference on the zeta function at the Edwin Schroedinger Institute in Vienna.
- [38] A. M. Odlyzko, "The 10^{22} -nd zero of the Riemann zeta function," in *Dynamical, Spectral, and Arithmetic Zeta Functions* (M. van Frankenhuysen and M. L. Lapidus, eds.), no. 290 in Amer. Math. Soc., Contemporary Math. series, pp. 139–144, 2001.

- [39] P. Sarnak, "Quantum Chaos, Symmetry, and Zeta functions, II: Zeta functions," in *Current Developments in Mathematics* (R. Bott, A. Jaffe, D. Jerison, G. Lusztig, I. Singer, and S.-T. Yau, eds.), vol. 1997, pp. 145–159, International Press, 1997.
- [40] M. V. Berry, "Riemann's zeta function: a model for quantum chaos?," in *Quantum chaos and statistical nuclear physics* (T. H. Seligman and H. Nishioka, eds.), vol. 263 of *Lecture Notes in Physics*, pp. 1–17, Springer Berlin / Heidelberg, 1986.
- [41] P. Leboeuf, A. G. Monastera, and O. Bohigas, "The Riemannium," *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 6, pp. 205–210, 2001.
- [42] B. Hayes, "The Riemannium," *American Scientist*, vol. 91, pp. 296–300, July–August 2003.
- [43] S. Okubo, "Lorentz-invariant Hamiltonian and Riemann hypothesis," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 31, no. 3, pp. 1049–1057, 1998.
- [44] M. Berry and J. Keating, " $H = xp$ and the Riemann Zeros," in *Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder*, vol. 370 of *NATO ASI Series B Physics*, pp. 355–368, Plenum Press, 1999.
- [45] F. Steiner and P. Trillenber, "Refined asymptotic expansion for the partition function of unbounded quantum billiards," *J. Math. Phys.*, vol. 31, no. 7, pp. 1670–1676, 1990.
- [46] S. Endres and F. Steiner, "The Berry–Keating operator on $L^2(\mathbb{R}_+, dx)$ and on compact quantum graphs with general self-adjoint realizations," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 43, no. 9, p. 095204, 2010.
- [47] G. Sierra and J. Rodriguez-Laguna, "The $H = xp$ model revisited and the Riemann zeros," *Physical Review Letters*, vol. 106, p. 200201, 2011.
- [48] G. Sierra, "General covariant xp models and the Riemann zeros," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 45, no. 5, p. 055209, 2012.
- [49] C. M. Bender, D. C. Brody, and M. P. Müller, "Hamiltonian for the zeros of the riemann zeta function," *Physical Review Letters*, vol. 118, p. 130201, 2017.
- [50] J. Keating and N. Snaith, "Random matrix theory and $\zeta(1/2 + it)$," *Commun. Math. Phys.*, vol. 214, pp. 57 – 89, 2000.
- [51] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Contributions to the theory of the Riemann zeta function and the theory of prime distribution," *Acta Mathematica*, vol. 41, pp. 119–196, 1918.
- [52] A. Ingham, "Mean-Value Theorems in the Theory of the Riemann Zeta-Function," *Proc. London Math. Soc.*, vol. s2-27, pp. pp. 273–300, 01 1928.
- [53] J. B. Conrey and A. Ghosh, "A conjecture for the sixth power moment of the Riemann zeta-function," *Int. Math. Res. Notices*, vol. 1998, pp. 775–780, 1998.
- [54] J. B. Conrey and S. M. Gonek, "High moments of the Riemann zeta-function," *Duke Math. J.*, vol. 107, pp. 577–604, 04 2001.

- [55] P. W. Shor, "Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer," *arXiv:quant-ph/9508027*, Aug. 1995.
- [56] R. V. Ramos and F. V. Mendes, "Riemannian Quantum Circuit," *Physics Letters A*, vol. 378, pp. 1346–1349, May 2014.
- [57] J. I. Latorre and G. Sierra, "There is entanglement in the primes," *Quantum Information & Computation*, vol. 15, no. 7&8, pp. 0622–0659, 2015.
- [58] J. I. Latorre and G. Sierra, "Quantum computation of prime number functions," *Quantum Information & Computation*, vol. 14, no. 7&8, pp. 0577–0588, 2014.
- [59] C. E. Creffield and G. Sierra, "Finding zeros of the riemann zeta function by periodic driving of cold atoms," *Phys. Rev. A*, vol. 91, p. 063608, Jun 2015.
- [60] M. F. Shlesinger, "On the Riemann hypothesis: a fractal random walk approach," *Physica. A*, vol. 138, no. 1–2, pp. 310–319, 1986.
- [61] K. S. Alexander, K. Baclawski, and G. C. Rota, "A stochastic interpretation of the Riemann zeta function," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 90, no. 2, pp. 697–699, 1993.
- [62] P. Biane, J. Pitman, and M. Yor, "Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions," *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 38, no. 4, pp. 435–465, 2001.
- [63] H. A. Kramers and G. H. Wannier, "Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part I," *Phys. Rev.*, vol. 60, pp. 252–262, Aug 1941.
- [64] R. P. Feynman, *Statistical mechanics: a set of lectures by R. P. Feynman*. Frontiers in physics, New York, NY, USA: W. A. Benjamin, Inc., 1972. Notes taken by R. Kikuchi and H. A. Feiveson. Edited by Jacob Shaham.
- [65] C. N. Yang and T. D. Lee, "Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation," *Phys. Rev.*, vol. 87, pp. 404–409, Aug 1952.
- [66] T. D. Lee and C. N. Yang, "Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model," *Phys. Rev.*, vol. 87, pp. 410–419, Aug 1952.
- [67] J. Łopuszański and A. Pawlikowski, *Fizyka Statystyczna*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1969.
- [68] I. Bena, M. Droz, and A. Lipowski, "Statistical Mechanics Of Equilibrium And Nonequilibrium Phase Transitions: The Yang–Lee Formalism," *International Journal of Modern Physics B*, vol. 19, no. 29, pp. 4269–4329, 2005.
- [69] M. E. Fisher, "The nature of critical points," in *Lectures in Theoretical Physics* (W. Brittin, ed.), vol. VIIC, p. p.1, University of Colorado Press, Boulder, Colorado, 1965.
- [70] A. Knauf, "On a ferromagnetic spin chain," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 153, no. 1, pp. 77–115, 1993.

- [71] J. Fiala and P. Kleban, "Generalized Number Theoretic Spin Chain – Connections to Dynamical Systems and Expectation Values," *Journal of Statistical Physics*, vol. 121, no. 3-4, pp. 553–577, 2005.
- [72] M. Planat, P. Solé, and S. Omar, "Riemann hypothesis and quantum mechanics," *Journal of Physics A Mathematical General*, vol. 44, p. 145203, Apr. 2011.
- [73] D. Schumayer and D. A. W. Hutchinson, "Physics of the Riemann hypothesis," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 83, pp. 307–330, Apr 2011.
- [74] L. Bunimovich and C. Dettmann, "Open Circular Billiards and the Riemann Hypothesis," *Physical Review Letters*, vol. 94, no. 10, p. 100201, 2005.

DLACZEGO MATEMATYKA POZWALA ROZUMIEĆ I OPISYWAĆ ŚWIAT? REFLEKSJA FILOZOFICZNA

ROMAN MURAWSKI

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Już potoczna obserwacja pokazuje, że matematyka jest wykorzystywana przez rozmaite nauki, zwłaszcza nauki przyrodnicze, w badaniu świata rzeczywistego, w tym świata fizycznego. Jest tak właściwie od starożytności. Już starożytni Egipcjanie i Babilończycy wykorzystywali matematykę w rozmaitych praktycznych celach, na przykład przy mierzeniu powierzchni pól uprawnych, budowie piramid itd. W starożytnej Grecji pojawiła się idea, że zjawiska przyrodnicze nie są wynikiem arbitralnych decyzji czy kaprysu bogów, ale podlegają z konieczności jakimś prawom – zapoczątkowało to proces demitologizacji przyrody i rozumowe badanie świata. Początkowo badania te miały charakter raczej jakościowy – tak było na przykład u Arystotelesa (por. jego fizykę). W czasach nowożytnych pojawia się nowoczesna, aktualna do dziś, metoda naukowa, łącząca eksperyment z rozumowaniem, matematyczne modelowanie z eksperymentem. Za jej ojca uznaje się Galileusza. U podstaw tej metody leży aktywna postawa badacza (w odróżnieniu od postawy uczonych wcześniejszych, zwłaszcza starożytnych i średnio-wiecznych, która charakteryzowała się kontemplacją natury). Jądem nowej postawy jest dążenie do wyrażenia w sposób ścisły, w języku matematyki regularności w przyrodzie, czyli praw przyrody, oraz ich weryfikacja poprzez eksperyment. Galileusz pisał, że:

Księga natury pisana jest w języku matematycznym

oraz

Matematyka jest alfabetem, za pomocą którego Bóg opisał wszechświat.

Dzięki Galileuszowi fizyka nowożytna stała się teorią w pełni zmatematyzowaną. Można za Krzysztofem Maurinem powiedzieć, że dziś fizyka i matematyka stanowią w jakimś sensie jedność. Czy to tylko przypadek, kwestia kulturowa, skutek tego, że Galileusz zaproponował, żeby tak właśnie badać świat rzeczywisty i sposób ten okazał się skuteczny, czy też kryją się za tym głębsze racje i przyczyny?

Zauważmy, że matematykę stosuje się nie tylko w naukach przyrodniczych, w szczególności w fizyce, astronomii czy chemii oraz w inżynierii, ale także próbuje się ją stosować i w innych naukach: naukach społecznych (na przykład w socjologii), w biologii, w lingwistyce itd. Co więcej, uważa się, że matematyka nadaje tym naukom walor jeszcze większej „naukowości”.

Pojawia się zatem pytanie: jak to się dzieje, że matematyka nadaje się do opisu świata, że jej twierdzenia, abstrakcyjne i oderwane od empirii, są doskonałym narzędziem opisu tegoż świata? Dlaczego twierdzenia matematyczne opisujące zależności między obiektami matematycznymi okazują się prawdziwe w świecie, pozwalają go opisywać, a nawet zmieniać i przekształcać, pozwalają konstruować nowe przedmioty i obiekty realne, które funkcjonują i służą człowiekowi? Jakie są związki między matematyką czystą a matematyką stosowaną, dlaczego twierdzenia matematyki, będącej *par excellence* nauką teoretyczną, można stosować do konkretnych problemów praktycznych?

Obecność matematyki w naukach może zadziwiać. Pojęcia matematyczne pojawiają się bowiem często w zupełnie nieoczekiwanych sytuacjach i związkach, pozwalając na nieoczekiwane ścisły i dokładny opis zjawisk. Eugene Paul Wigner w pracy *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural science*¹ podaje przykład stwierdzenia z zakresu demografii (która korzysta w szczególności ze statystyki matematycznej)

¹ E.P. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, „Communications on Pure and Applied Mathematics” nr 13, s. 1-14; przekład polski: *Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych*, w: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002, s. 293-309.

dotyczącego kwestii takich, jak zaludnienie, w którym to stwierdzeniu pojawia się symbol Π . Zdumiony czytelnik pyta, co może mieć wspólnego Π , czyli stosunek obwodu koła do jego średnicy z demografią? A jednak ma. Co to zatem znaczy, skąd to się bierze?

Wiele prostych pojęć matematycznych i wiele obiektów matematyki ma swe bezpośrednie źródło w rzeczywistości fizycznej, pojawiło się niemal wprost z doświadczenia. Można powiedzieć, że geneza matematyki jest empiryczna. Do XIX wieku wiele teorii matematycznych tworzonych było na zamówienie fizyki. Pewne podstawowe teorie matematyczne powstawały i rozwijały się pod naciskiem zainteresowań i potrzeb nauk przyrodniczych, ale nie wszystkie. Matematyka była jednak – i tym bardziej jest dziś – autonomiczną dziedziną aktywności intelektualnej. Rozwija się ona obecnie przede wszystkim wedle swoich własnych wewnętrznych zasad i reguł (wymienić tu trzeba dążenie do uogólniania, do unifikacji, do prostoty, do swoistego piękna), bez oglądania się na potencjalne zastosowania – choć często tworzone tak teorie okazują się z czasem bardzo przydatnym narzędziem w badaniu świata rzeczywistego. We współczesnej matematyce mamy do czynienia z obiektami wysoce abstrakcyjnymi, całkowicie oderwanymi od zmysłowo poznawalnej rzeczywistości. Wiele dziedzin matematyki nie ma żadnych odniesień i żadnych zastosowań (przynajmniej dotąd) w takiej czy innej praktyce, choć – jak pokazują liczne przykłady z historii nauki – z czasem mogą takie zastosowanie znaleźć. Wystarczy tu wspomnieć choćby geometrie nieeuklidesowe, które zdawały się być igraszką intelektualną, a okazały się bardzo przydatne na przykład w teorii względności (w kinematyce relatywistycznej). Matematyka jest nauką aprioryczną i posługuje się pojęciami apriorycznymi – jak więc się to dzieje, że pojęcia te i badane przez matematykę związki między nimi pozwalają tworzyć (mniej czy bardziej) adekwatne modele rzeczywistości fizycznej, co więcej, modele te umożliwiają nie tylko opisywanie świata, ale pełnią także funkcje predyktywne, pozwalają przewidywać przyszłe stany świata. Współczesna matematyka jest oparta na teorii mnogości – matematycznej teorii zbiorów, w tym zbiorów nieskończonych. Gdzie jednak znaleźć w zmysłowo poznawalnej rzeczywistości zbiory, zwłaszcza zbiory nieskończone? A nieskończoność, w szczególności nieskończoność aktualna, jest przecież niezbędnym, koniecznym elementem świata obiektów matematyki. Współczesne teorie matematyczne to (sformalizowane) teorie aksjomatyczne. Przy tym aksjomatem może być nie tylko, jak dawniej

przyjmowano, zdanie prawdziwe (zauważmy, że nie jest jasne, co to miałoby znaczyć), ale każde właściwie zdanie – byle spełniony był warunek niesprzeczności leżącego u podstaw danej teorii układu aksjomatów. Dodajmy jeszcze, że w tworzeniu (nowych) teorii matematycznych często ważną rolę odgrywa pierwiastek estetyczny, co więcej, dążenie do piękna teorii jest jednym z motorów rozwoju matematyki. Jak powiadał angielski matematyk Godfrey Harold Hardy, piękno „jest pierwszym sprawdzianem; nie ma na świecie trwałego miejsca dla brzydkiej matematyki”². Twierdzenia abstrakcyjnych aksjomatycznych teorii matematycznych można na wiele sposobów interpretować – i stanowi to o ich sile i znaczeniu. Jak więc taka teoria może się odnosić do rzeczywistości, jak teorie sformalizowane mogą być praktycznie stosowane?

Pytanie o stosowalność abstrakcyjnych teorii matematycznych do opisu i badania świata związane jest z ogólniejszym pytaniem epistemologicznym, a mianowicie z pytaniem o to, jak i dlaczego myślenie ludzkie, w szczególności myślenie naukowe, pasuje, jest adekwatne w stosunku do konkretnej rzeczywistości. Dlaczego rozumowanie zgodne z zasadami logiki, wychodzące od prawdziwych przesłanek, zawsze prowadzi do prawdziwych wniosków – jest to właściwie pytanie o istotę i status praw i twierdzeń logiki. Mamy tu zresztą do czynienia z jeszcze jednym problemem, a mianowicie z problemem istnienia prawidłowości i regularności w świecie, z problemem istnienia praw przyrody, które umysł ludzki, posługując się w szczególności matematyką i logiką, jest zdolny odkrywać, formułować i wykorzystywać. Możemy więc mówić o pewnej racjonalności świata, a nawet o racjonalności typu matematycznego. Jest to jednak problem wykraczający poza ramy naszych rozważań. Przyjmujemy zatem fakt istnienia takich prawidłowości bez podejmowania próby odpowiedzi na pytanie o racje i przyczyny ich istnienia.

Zauważmy, że na główny problem naszych rozważań można patrzeć z odmiennych perspektyw badawczych: inna będzie perspektywa filozofii matematyki, inna filozofii nauki, w szczególności filozofii fizyki, inna jeszcze filozofii przyrody. Dodajmy też, że skoro matematyka jest

² Cyt. za A.L. Hammond, *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura*, w: L.A. Steen, *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1983, s. 26–48; cytat na s. 34. Oryginał angielski: „[Beauty] is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics” (por. A.L. Hammond, *Mathematics – Our Invisible Culture*, w: L.A. Steen (red.), *Mathematics Today. Twelve Informal Essays*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1978, s. 22).

formułowana w języku ludzkim, zatem w kwestie relacji między matematyką a światem uwikłany jest także podmiot ludzki. Należałoby więc uwzględnić także rolę umysłu i wziąć pod uwagę konstatacje filozofii umysłu i kognitywistyki. Dla ustalenia uwagi skupimy się jednak w dalszym ciągu przede wszystkim na perspektywie filozofii matematyki.

Zanim spróbujemy opowiedzieć, jak filozofia matematyki odpowiada na sformułowane wyżej pytania, powinno się dokonać zasadniczego rozróżnienia. Należy mianowicie odróżnić matematyczność i matematyzowalność świata. Przez matematyczność świata rozumiemy tezę głoszącą, że istnieje pewna odpowiedniość między obiektami, na przykład przyrodniczymi i matematycznymi, że kategorie matematyczne odnoszą się do świata, że świat jest ontycznie matematyczny, że matematyka jest „językiem przyrody”. Przez matematyzowalność zaś należy rozumieć możliwość skutecznego i efektywnego używania metod matematyki w dziedzinach wiedzy próbujących wyjaśniać świat i jego prawidłowości, czyli fakt podatności świata, w tym przyrody, na opis wykorzystujący język i metody matematyki.

Zauważmy, że teza o matematyczności świata implikuje tezę o jego matematyzowalności. Jeśli świat jest matematyczny, to matematyka jest kluczem do jego poznania i opisanie. Dodajmy, że problem – czy świat jest matematyczny, związany jest bezpośrednio z pytaniem o to, czy obiekty matematyki są odkrywane czy też tworzone przez matematyka. Wśród zwolenników tezy o matematyczności świata/przyrody znajdujemy Alfreda North Whiteheada, Wernera Heisenberga, Carla Friedricha von Weizsäckera czy Rogera Penrose’a³, a na gruncie polskim Józefa Życińskiego i Michała Hellera. Życiński pisał:

Specyficzny sens matematyczności przyrody przejawia się więc w tym, iż abstrakcyjnym formułom matematyki można przyporządkować modele niezamierzone w dziedzinie konkretnych procesów fizycznych⁴.

Heller zaś pisał:

[W] ogromnej liczbie doświadczalnych sytuacji świat zachowuje się dokładnie tak, jakby rzeczywiście miał czysto matematyczną strukturę.

³ Penrose twierdzi, że świat jest zbudowany według modelu matematycznego, a my go po kawałku odkrywamy.

⁴ J. Życiński, *Jak rozumieć matematyczność przyrody*, w: M. Heller, J. Życiński, A. Michalik (red.), *Matematyczność przyrody*, OBI, Kraków 1992, s. 28.

Dzięki temu mamy prawo powiedzieć, że modele matematyczne ujawniają strukturę świata⁵.

W innym zaś miejscu:

Matematyczność przyrody polega na tym, że struktura Wszechświata jest przedziwnie podobna do tych struktur, których studiowaniem zajmuje się matematyka⁶.

W tym ujęciu matematyczność przysługuje przyrodzie immanentnie – mamy tu zatem do czynienia z tezą ontologiczną. Oznacza ona zarówno strukturalną, jak i funkcjonalną adekwatność przyrody w stosunku do matematyki.

Dodajmy jeszcze, że matematyczność przyrody jest w praktyce hipotezą roboczą, z jaką fizycy przystępują do badania materii.

Jak w historii nauki, dokładniej: w filozofii matematyki wyjaśniano kwestię matematyczności i matematyzowalności świata?

Zacznijmy od Platona (427–347 p.n.e.). Podstawą jego koncepcji jest teoria idei głosząca, że istnieją dwa rodzaje bytu, tworzące dwa odrębne światy – niezienne idee, które są określonymi przedmiotami istniejącymi poza czasem, przestrzenią i ludzkim poznaniem, oraz zmienne rzeczy, postrzegane za pomocą zmysłów, mniej realne niż idee, będące zaledwie nietrwałymi cieniami idei. Idee istnieją prawdziwie, rzeczy zaś co najwyżej stają się. Rzeczy są odbiciami, cieniami idei, idee zaś są wzorami rzeczy – zatem idee są bytowo uprzednie w stosunku do świata materialnego. Obiekty matematyki należą do świata idei. Twierdzenia matematyki stosują się do świata rzeczy, gdyż te ostatnie są podobne do idei jako swoich wzorców, dokładniej: uczestniczą w odpowiednich ideach. W konsekwencji stosowalność matematyki do opisu świata przestaje być zagadką.

Teoria Platona dała początek koncepcjom zwanym w filozofii matematyki platonizmem matematycznym. Platonizm nie jest jednolity. Cechą wspólną koncepcji określanych tym mianem jest uznawanie istnienia świata bytów matematycznych, niezależnego od świata materialnego i od umysłu ludzkiego. Są one zatem w szczególności niezależne też

⁵ M. Heller, *Jak istnieje metryka Lorentza?*, w: M. Heller, W. Skoczny, J. Życiński (red.), *Spór o uniwersalia a nauka współczesna*, OBI, Kraków 1992, s. 31.

⁶ M. Heller, *Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna?*, w: M. Heller, J. Życiński, A. Michalik (red.), *Matematyczność przyrody*, OBI, Kraków 1992, s. 10.

od czasu i od przestrzeni. Świat, zwłaszcza przyroda, staje się w platonizmie materialnym modelem teorii matematycznych czy ucieleśnieniem struktur matematycznych. Koncepcja ta ma jednak pewne wady. Otóż nie wyjaśnia ona w pełni związków między idealnymi obiektami matematycznymi a przedmiotami fizycznymi/materialnymi. Dopuszcza też równoległe istnienie do postrzegalnej zmysłowo rzeczywistości idealnego świata obiektów matematyki, które nie oddziałują przyczynowo na ten świat materialny. W konsekwencji nie ma bezpośredniego dostępu poznawczego do świata obiektów matematycznych. Możemy je poznawać albo pośrednio – przez zmysłowe poznawanie rzeczywistości przyrodniczej, albo przy pomocy jakiegoś (niejasnego w istocie) rodzaju intuicji czy bezpośredniego oglądu rozumowego. Sam Platon tłumaczył to swoistą teorią anamnezy. Według niego matematyk nawiązuje do obserwacji i posługuje się myśleniem obrazowym, ale jest to tylko okazja do uświadomienia sobie pojęć, a nie materiał do ich wytworzenia. Matematyk bowiem jedynie przypomina sobie w ten sposób pojęcia, odwołując się do wrodzonej wiedzy o ideach, którą posiada jego umysł. Zdobył ją, oglądając idee w poprzednim życiu i zachowując o nich pamięć. Dlatego w obecnym życiu nie trzeba już zdobywać wiedzy o ideach, wystarczy ją sobie przypomnieć. Wiedza wrodzona jest właśnie „przypomnieniem” – *anamnezis* (por. w związku z tym dialog *Menon*).

Zwolennikami platonizmu było i jest bardzo wielu matematyków⁷. Znajdujemy wśród nich Euklidesa (ok. 365-ok. 300 p.n.e.), neoplatonika Proklosa Diadochusa (410–485), twórcę teorii mnogości Georga Cantora (1845–1918), twórcę logicyzmu Gottloba Frege (1848–1925), Kurta Gödla (1906–1978) czy wreszcie współtwórcę polskiej szkoły logicznej Jana Łukasiewicza (1878–1956). Frege pisał, że:

Okazało się, że liczba, którą zajmuje się arytmetyka, musi być traktowana nie jako niesamodzielny atrybut, lecz rzeczownikowo (*substantivisch*). [...] Liczba jawi się [...] jako rozpoznawalny przedmiot, chociaż nie fizyczny ani nawet przestrzenny, czyli taki, który moglibyśmy sobie jakoś wyobrazić⁸.

⁷ Żartobliwie powiada się, że 99,44% matematyków to platonicy.

⁸ G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Wilhelm Koebner, Breslau 1884, § 106. Przekład polski (fragmenty): *O pojęciu liczby*, w: R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2003 (wyd. III), s. 197–226; cytata na s. 224.

Wedle Gödla przyjęcie tezy, że obiekty matematyki istnieją realnie poza czasem i przestrzenią oraz niezależnie od umysłu poznającego (choć nie wyjaśnia on, czym one są i jak istnieją) jest konieczne, by otrzymać zadowalający system matematyki, tak samo jak przyjęcie realnego istnienia obiektów fizycznych jest potrzebne do wyjaśnienia wrażeń zmysłowych. Pisał:

Klasy i pojęcia mogą być pojmowane jako rzeczywiste obiekty istniejące niezależnie od naszych definicji i konstrukcji. [...] Wydaje się, że założenie istnienia takich obiektów jest tak samo uzasadnione, jak przyjęcie istnienia ciał fizycznych, a przecież jest wiele racji, by przyjąć ich istnienie⁹.

Przy tym obiekty matematyczne są wedle Gödla czymś różnym od swej reprezentacji w teoriach matematycznych – są w stosunku do nich transcendentne. Podstawowe źródło wiedzy matematycznej stanowi według Gödla intuicja. Dane intuicji muszą być rozwijane poprzez głębsze badanie obiektów. W konsekwencji wiedza matematyczna jest nie tylko wynikiem biernej kontemplacji danych intuicyjnych, ale jest także rezultatem aktywności umysłu. Ta ostatnia ma charakter dynamiczny i kumulatywny.

Jan Łukasiewicz pisał, że gdy zajmuje się nawet najprostszym zagadnieniem logicznym, to ma wrażenie, że znajduje się „wobec jakiejś potężnej, niesłyszanej zwartej i niezmiennie odpornej konstrukcji”. I dalej:

Konstrukcja ta działa na mnie jak jakiś konkretny dotykalny przedmiot, zrobiony z najtwardszego materiału, stokroć mocniejszego od betonu i stali. Nic w niej zmienić nie mogę, nic sam dowolnie nie tworzę, lecz w wytężonej pracy odkrywam w niej tylko coraz to nowe szczegóły, zdoływając prawdy niewzruszone i wieczne. Gdzie jest i czym jest ta idealna konstrukcja? Filozof wierzący powiedziałby, że jest w Bogu i jest myślą Jego¹⁰.

⁹ K. Gödel, *Russell's Mathematical Logic*, w: *The Philosophy of Bertrand Russell*, ed. P.A. Schilpp, The Tudor Publ. Comp., New York 1944, s. 125–153 (cytat na s. 137); także w: P. Benacerraf, H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Englewood Cliffs, New Jersey 1964, s. 211–232; wyd. II: Cambridge University Press, Cambridge 1983, s. 447–469.

¹⁰ J. Łukasiewicz, *W obronie logistyki*, w: *Myśl katolicka wobec logiki współczesnej. Studia Gnesnensia* 15, s. 12–26, 159–165; cytat na s. 165. Przedruk w: J. Łukasiewicz, *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1961, s. 210–219.

Inną odpowiedź na pytanie o status ontologiczny obiektów matematyki i ich związek z rzeczywistością zmysłowo poznawalną znajdujemy u Arystotelesa (384–322 p.n.e.), ucznia Platona. Otóż według niego matematyka nie jest nauką o niezależnych bytach idealnych, w stosunku do których świat rzeczy jest wtórny, ale jest nauką o obiektach wydobywanych z rzeczy w procesie abstrakcji, czyli pewnego rodzaju idealizacji. Jest więc nauką o idealizacjach rozumianych jako wytwory odpowiedniego procesu myślowego. Idee są formami albo istotami rzeczy i tkwią w samych tych rzeczach. Obiekty matematyczne są więc – podobnie jak w platonizmie – rzeczywiste, są myślowymi odbiciami form rzeczy, istnieją obiektywnie, ale nie niezależnie od świata rzeczy. Matematyka jest nauką o własnościach i związkach wzajemnych tych obiektów, które poprzez formy rzeczy stosują się do świata empirycznego. W dziele *Fizyka* Arystoteles pisał:

Ciała fizyczne zawierają płaszczyzny, odcinki i punkty, które to przedmioty bada matematyk [...], ale nie jako ograniczenia tego czy innego ciała fizycznego, lecz rozpatruje je oddzielnie, ponieważ można je w myśli oderwać od ruchu, nie popełniając błędu¹¹.

W *Metafizyce* znajduje się taka oto wypowiedź:

Matematyk rozpatruje swoje obiekty ogłosiwszy je z takich własności jak lekkość, twardość [...] i zatrzymuje się tylko nad tym, co jest wielkością i rozciągłością [...], badając raz położenie jednych rzeczy względem drugich i fakty, które stąd wynikają, innym razem ich współmierności i niewspółmierności, jeszcze kiedy indziej ich stosunki¹².

Stanowisko reprezentowane przez Arystotelesa nazywa się w filozofii realizmem umiarkowanym. Koncepcje głoszące taki realizm nie są jednorodne. Mieszczą się więc tu obok koncepcji Arystotelesa także koncepcja św. Tomasza z Akwinu, koncepcje tomistów czy zwolenników materializmu dialektycznego, a także niektórych matematyków¹³. Można tu też umieścić koncepcję Nicolasa D. Goodmana, który głosi,

¹¹ Arystoteles, *Fizyka*, tłum. K. Leśniak, w: *Dzieła wszystkie*, t. 2, PWN, Warszawa 1990, 193 b 22.

¹² Arystoteles, *Metafizyka*, tłum. K. Leśniak, w: *Dzieła wszystkie*, t. 2, PWN, Warszawa 1990, 1061 a 33.

¹³ Z matematyków polskich związki między matematyką a światem przyrodniczym podkreślali na przykład Hugo Steinhaus czy Andrzej Mostowski.

że obiekty matematyki to formy matematyczne zjawisk fizycznych¹⁴. Cechą łączącą te koncepcje jest uznanie obiektów matematyki za abstrakcje z rzeczywistości fizycznej. Przy tym należy podkreślić, że aby wyjaśnić całą złożoność współczesnej matematyki, dopuszcza się tu abstrakcje wielostopniowe, czyli abstrakcje z abstrakcji itd. Różnie też rozumie się sam proces abstrakcji. W szczególności Arystoteles i tomiści mówią o abstrakcji pomijającej zmienność, Jean Piaget o abstrakcji odzwierciedlającej, czyli abstrakcji z czynności podmiotu, materializm dialektyczny o abstrakcji uogólniającej, abstrakcji potencjalnego urzeczywistnienia i abstrakcji nieskończoności aktualnej¹⁵.

Cechą pozytywną umiarkowanego realizmu jest fakt, że nie wikła się on w trudności ontologiczne platonizmu. Wadą jest w szczególności to, że istnienie obiektów matematycznych jest tu uzależnione nie tylko od przedmiotów świata materialnego, ale również od istnienia abstrahującego podmiotu – musi bowiem istnieć nie tylko świat materialny, ale także ktoś lub coś dokonujące aktu abstrakcji. Dalej, niektóre pojęcia matematyczne są nie tyle abstrakcjami z obiektów fizycznych, ile idealizacjami tychże. Co więcej, w matematyce funkcjonuje wiele obiektów niemających związku z przedmiotami świata materialnego, ale powstałych poprzez abstrakcję z abstraktów.

Pewnego podobieństwa do koncepcji Arystotelesa dopatrzyć się można u empirystów. Głoszą oni, że poznanie matematyczne pochodzi całkowicie z doświadczenia. Zaliczyć tu można Johna Locke’a (1632–1704), Davida Hume’a (1711–1776) czy Johna Stuarta Milla (1806–1873). Ten ostatni głosił na przykład, że pojęcia matematyczne są wyabstrahowane z obiektów otaczającej nas rzeczywistości poznawalnej zmysłowo poprzez pominięcie pewnych cech realnych przedmiotów przy jednoczesnym uogólnieniu i wyidealizowaniu innych. W dziele *System of Logic* (1843, s. 350) pisał:

¹⁴ Por. N. Goodman, *Mathematics as Natural Science*, „Journal of Symbolic Logic” 1990, nr 55, s. 182–193.

¹⁵ Por. J. Piaget, *Psychologia i epistemologia*, tłum. Z. Zakrzewska, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1977, oraz A. Lemańska, *Przedmiot matematyki w materializmie dialektycznym*, w: M. Lubański i Sz. Ślaga (red.), *Z zagadnień filozofii przyrodznawstwa i filozofii przyrody*, t. 7, Akademia Teologii Katolickiej, Warszawa 1985, s. 23–53.

Punkty, linie, koła i kwadraty, jakie ktoś ma w swoim umyśle, są w moim rozumieniu po prostu kopiami punktów, linii, kół i kwadratów, z jakimi się on poznał w swoim doświadczeniu¹⁶.

W tym ujęciu stosowalność matematyki do opisu świata pozostaje nierozwiązalną zagadką.

Obiektów matematyki szuka też podobnie jak Arystoteles w rzeczach żyjący w XV wieku teolog i matematyk, jeden z ostatnich scholastyków, Mikołaj z Kuzy (1401–1464), przy tym uzasadnia on swe stanowisko teologicznie. Bóg stworzył świat wedle zasad i praw matematyki i umieścił w rzeczach tego świata idee matematyczne, takie jak liczby czy figury geometryczne. Człowiek próbuje pojąć i zrozumieć to Boże dzieło, stworzone i panujące w nim zależności, symulując i rekonstruując je w matematyce.

Podobnie sądził Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), powiadając „Dum Deus calculat et cogitationem exercit, fit mundus”¹⁷ (Gdy Bóg liczy i zamyśla, świat się staje). Zdanie to stanowi jądro racjonalizmu Leibniza grającego wedle niego istotną rolę w matematyce. Matematyka jest zatem boskim źródłem Bożego stworzenia. Stosowalność matematyki do opisu i wyjaśniania świata nie stanowi więc już problemu, więcej, staje się warunkiem takiego opisu (w wymiarze kosmologicznym). Matematyka staje się odkrywaniem i rekonstruowaniem boskiego *ratio* w stworzeniu.

Podobnie zdają się sądzić Życiński i Heller. Skoro obiekty i struktury matematyczne są czymś abstrakcyjnym i idealnym, to chcąc wyjaśnić matematyczność świata, musimy przyjąć założenie istnienia Boga jako Wielkiego Matematyka, który nadał rzeczywistości kształt matematyczny. Heller powie nawet, że „Bóg to Matematyka”. Przy tym nigdy nie poznamy świata do końca, bo nasza matematyka jest zbyt prosta w stosunku do tej, którą posługuje się Bóg i która jest „zakodowana” w świecie.

¹⁶ J.S. Mill, *System of Logic Ratiocinative and Inductive, Being a connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation*, 1843; przekład polski: *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej*, tłum. C. Znamierowski, PWN, Warszawa 1962; fragmenty także w: R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2003 (wyd. III), s. 147–150; cytata na s. 148.

¹⁷ Por. jego esej *Dialogus*, August 1677, s. 191.

Jeszcze inne wyjaśnienie fenomenu adekwatności matematyki w stosunku do świata daje wielki filozof królewiecki Immanuel Kant (1724–1804). Wedle niego twierdzenia matematyki czystej są sądami syntetycznymi (czyli rozszerzającymi naszą wiedzę) *a priori* (czyli są niezależne od doświadczenia zmysłowego). Nie mogą one być zdaniem empirycznymi, czyli *a posteriori*, gdyż są powszechne i konieczne. Muszą zaś być syntetyczne, gdyż dotyczą jednostkowych wyobrażeń, jakimi są przestrzeń i czas. Pojawia się jednak problem: jak w ogóle są możliwe zdania syntetyczne *a priori*? Kant udzielił odpowiedzi na to zasadnicze pytanie w *Krytyce czystego rozumu* i w *Prolegomenach do wszelkiej przyszłej metafizyki, która będzie mogła wystąpić jako nauka*.

Wedle niego przestrzeń i czas nie są realnymi przedmiotami istniejącymi poza nami, czyli poza poznającymi podmiotami, lecz są stałymi formami naszej zmysłowości, naszego oglądu, tzn. są dodawane przez nasze zmysły do odbieranych przez nas wrażeń. W konsekwencji nie docieramy w naszym poznaniu do rzeczy samych w sobie (*Ding an sich*), nie poznajemy ich takimi, jakie są same w sobie, bo ujmujemy je w pewnych, właściwych naszej zmysłowości formach, tzn. w formach czasu i przestrzeni, które są formami porządkującymi nasze wrażenia zmysłowe.

Matematyka bada właśnie czas (arytmetyka) i przestrzeń (geometria) jako aprioryczne formy naoczności. Zajmuje się więc sferą czystego oglądu. Pozwala ujmować i organizować oraz strukturyzować strumień wrażeń płynący od świata. W *Prolegomenach* Kant pisał:

Otóż przestrzeń i czas są tymi danymi naocznymi (*Anschauungen*), które czysta matematyka kładzie u podstaw wszystkich swych poznań i sądów, występujących zarazem jako apodyktyczne i konieczne. [...] Geometria kładzie u [swych] podstaw czystą naoczność przestrzeni. Arytmetyka nawet swoje pojęcia liczb wytwarza przez kolejne dołączanie jednostek w czasie; zwłaszcza jednak czysta mechanika może wytworzyć swe pojęcia ruchu tylko za pomocą wyobrażenia czasu¹⁸.

Kant nie twierdzi, że dla pełnego opisu struktury przestrzeni i czasu wystarczy bierna kontemplacja. Przeciwnie – zakłada aktywność umysłu.

¹⁸ I. Kant, *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können*, 1783; przekład polski: *Prolegomena do wszelkiej przyszłej metafizyki, która będzie mogła wystąpić jako nauka*, tłum. B. Bornstein, oprac. J. Suchorzewska, PWN, Warszawa 1960 (wyd. I), 1993 (wyd. II); cytat na s. 47.

Umysł konstruuje pojęcia matematyczne w tym sensie, że wychodząc poza werbalne definicje tych pojęć, dostarcza stosownych przedmiotów *a priori*. Trzeba też podkreślić, że Kant wyraźnie odróżnia konstrukcję obiektu i postulowanie jego istnienia. Nie można więc na przykład skonstruować sfery pięciowymiarowej, ale można postulować jej istnienie. Właśnie to rozróżnienie postulowania istnienia obiektu matematycznego, co wymaga tylko wewnętrznej niesprzeczności, i jego konstrukcji, która wymaga, by przestrzeń percepcyjna miała pewną określoną strukturę, jest bardzo ważne dla zrozumienia filozofii Kanta.

Wedle Kanta twierdzenia matematyki czystej są – jak powiedzieliśmy wyżej – zdaniami syntetycznymi *a priori*. Są zatem konieczne. Zdania matematyki stosowanej natomiast są albo zdaniami syntetycznymi *a posteriori* (gdy dotyczą treści empirycznej doznań zmysłowych), albo zdaniami syntetycznymi *a priori* (gdy mówią o przestrzeni i czasie). Matematyka czysta mówi o przestrzeni i czasie niezależnie od materiału empirycznego, zaś matematyka stosowana odnosi się do struktury przestrzeni i czasu wraz z wypełniającym je materiałem.

Dlaczego jednak twierdzenia matematyki nadają się do opisu rzeczywistości poznawalnej zmysłowo? Kant odpowiada na to pytanie, pisząc w *Prolegomenach* tak:

Jeżeli jednak obraz ten, lub raczej ta naoczność formalna [tzn. czas i przestrzeń – uwaga moja, R.M.] jest istotną własnością naszej zmysłowości, za pomocą której jedynie bywają nam dane przedmioty, ta zaś zmysłowość przedstawia nie rzeczy same w sobie, lecz tylko ich zjawiska, to już bardzo łatwo daje się pojąć i jest zarazem nieodparcie dowiedzione, że wszystkie zewnętrzne przedmioty naszego świata zmysłowego muszą koniecznie z zupełną dokładnością zgadzać się z twierdzeniami geometrii; zmysłowość bowiem dzięki swej formie naoczności zewnętrznej (przestrzeni), którą zajmuje się geometria, sprawia dopiero, że owe przedmioty jako same tylko zjawiska stają się możliwe. [...] ponieważ przestrzeń, jak ją sobie myśli geometra, jest całkiem dokładnie formą zmysłowej naoczności, którą znajdujemy w nas samych *a priori* i która zawiera w sobie podstawę możliwości wszystkich zjawisk zewnętrznych (co do ich formy), przeto zjawiska muszą koniecznie i jak najściślej zgadzać się z twierdzeniami geometry, które on wyprowadza nie z jakiegoś zmyślnego pojęcia, lecz z podmiotowej podstawy wszystkich zjawisk zewnętrznych, mianowicie z samej zmysłowości¹⁹.

¹⁹ Dz. cyt., s. 55–56.

Kant powiada nawet, że:

Tyle jest w każdym poznaniu prawdziwej nauki, ile jest w nim matematyki²⁰.

Jeszcze inną odpowiedź daje Willard Van Orman Quine (1908–2000). Według niego matematykę należy rozważać nie w oderwaniu od innych nauk, ale jako element ogółu teorii wyjaśniających rzeczywistość²¹. Takie holistyczne spojrzenie na naukę doprowadziło go do sformułowania tzw. argumentu z niezbędności (*indispensability argument*), będącego we współczesnych dyskusjach na temat ontologii matematyki jednym z najważniejszych argumentów na rzecz realizmu. Argument ten głosi, że jeśli jesteśmy realistami w stosunku do teorii fizycznych posługujących się matematyką jako narzędziem, to konsekwentnie powinniśmy przyjąć też stanowisko realistyczne w odniesieniu do obiektów matematycznych, o których mowa w teorii. Skoro matematyka jest niezbędna na przykład w teoriach fizycznych, to istnieją jej obiekty, podobnie jak istnieją na przykład elektrony (jako jedne z obiektów fizyki niezbędnych do jej uprawiania). Quine przyjmuje bowiem tylko jeden sposób istnienia. Nie mamy więc u niego do czynienia z istnieniem: fizycznym, matematycznym, intencjonalnym, konceptualnym itp., tylko po prostu z istnieniem. Odrzuca też możliwość podziału teorii naukowych na część analityczną (czysto konwencjonalną) i syntetyczną (dotyczącą rzeczywistości). Zauważmy, że oparcie się na argumencie z niezbędności pozwala na naturalne wyjaśnienie faktu stosowalności matematyki do opisu i rozumienia świata rzeczywistego. Matematyka jako narzędzie wchodzi bowiem po prostu w skład konstruowanych teorii o świecie.

Dodajmy, że stanowisko podobne do stanowiska Quine'a reprezentuje również Hilary Putnam (1926–2016). Stąd też argument z niezbędności nazywa się często w literaturze argumentem Quine'a-Putnama.

Pewną nową odpowiedź proponuje modna ostatnio w filozofii matematyki koncepcja strukturalistyczna, wedle której matematyka bada struktury, a nie obiekty. Nie pytamy zatem na przykład, czym są liczby

²⁰ Cyt. za I. Kant, *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, s. 13. Tekst oryginalny: „[...] in jeder besonderen Naturlehre nur so viel *eigentliche* Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin *Mathematik* anzutreffen ist”.

²¹ Na temat koncepcji Quine'a por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2017 (wyd. VI), s. 111–112.

naturalne, nie ma to bowiem żadnego znaczenia. Istotne są tylko związki między czymś, co nazywamy liczbami. W istocie matematycy nie badają własności liczb czy innych obiektów jako takich, a jedynie związki i relacje między nimi. Interesują ich własności strukturalne, a nie własności samych pojedynczych wyrwanych z kontekstu obiektów. Może to dlatego jej twierdzenia dają się stosować w konkretnych rzeczywistych sytuacjach, mimo że dotyczą obiektów abstrakcyjnych, jakimi są struktury.

Popularne jest w ostatnich czasach w filozofii matematyki podejście uwzględniające rzeczywistą praktykę badawczą matematyków. Wśród tego typu koncepcji znajdujemy w szczególności koncepcję Raymonda Louisa Wildera, patrzącego na matematykę jako na system kulturowy²². Próbuje się tam odpowiadać na rozważane przez nas pytanie dotyczące stosowalności matematyki do opisu świata w następujący sposób: otóż, jeśli matematyka tak jak fizyka, chemia czy inne tym podobne dyscypliny są systemami kulturowymi i problemy, nad którymi pracują matematycy, fizycy czy chemicy, są im sugerowane w pewien sposób przez siły kulturowe działające w ramach odpowiednich subkultur oraz jeśli dodatkowo kontakty między matematykami, fizykami i chemikami są wystarczająco silne, to należy się spodziewać, że matematyka będzie się nadawała do stosowania w naukach przyrodniczych. W ten sposób otrzymujemy socjologiczno-kulturowe wyjaśnienie „efektywności matematyki” (wyjaśnienie, które, dodajmy, nie jest chyba niestety w pełni zadowalające, bo zatrzymuje się na poziomie zjawiskowym i socjologicznym tylko, a nie podaje głębszych racji ontologiczno-epistemologicznych).

Nie wspomnieliśmy do tej pory kilku ważnych koncepcji i stanowisk filozofii matematyki, takich jak nominalizm i konceptualizm czy klasyczne kierunki współczesnej filozofii matematyki, tzn. logicyzm, intuicjonizm i formalizm. Nie wnoszą one jednak nic nowego do rozważanego przez nas problemu. Według nominalizmu pojęcia matematyki są jedynie czystymi nazwami, a matematyka staje się dziedziną, w której bada się związki między tak rozumianymi pojęciami, staje się ona nauką formalną, grą na symbolach bez żadnego związku z rzeczywistością materialną. Próbuje się nawet (na przykład Field 1980) pokazywać, że matematyka, w szczególności aparat matematyczny, jest w istocie zbędny na przykład w fizyce – fizykę można uprawiać bez matematyki, matematyka nie wnosi niczego do naszego pojmowania i rozumienia

²² Por. R.L. Wilder, *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon Press, Oxford 1981.

świata, niczego, co byłoby empirycznie ważne²³. Ten rodzaj nominalizmu nazywa się w filozofii matematyki fikcjonalizmem – głosi on, że obiekty matematyki to jedynie użyteczne fikcje. Próbuje się uzasadniać tę tezę poprzez pokazywanie rekonstrukcji teorii fizycznych, w których to rekonstrukcjach wyeliminowano aparat matematyczny. Nie jest to oczywiście pełne uzasadnienie – wspomniane rekonstrukcje dotyczą jedynie pojedynczych teorii – u Hartry’ego Fielda jest to Newtonowska teoria grawitacji. Co więcej, rozważana teza załamuje się, gdy przejdzie się na przykład do mechaniki kwantowej, w której – jak powiada Werner Heisenberg – „Dopiero teoria rozstrzyga, co można zaobserwować”²⁴. Przy okazji widzimy tu, że pojęcie rzeczywistości zewnętrznej czy pojęcie świata, w badaniu których stosujemy matematykę, jest dziś inne, niż było dawniej. Dziś można powiedzieć, że mikroświat i makroświat „rozpuściły” się niejako w matematyce. Tak jest na przykład w mechanice kwantowej czy w kosmologii – tutaj granice między matematyką a rzeczywistością fizyczną niejako się zacierają.

Konceptualizm z kolei (głoszony m.in. przez intuicjonizm) twierdzi, że pojęcia matematyki to swobodny twór umysłu ludzkiego, który nie musi brać pod uwagę rzeczywistości zewnętrznej czy który – jak w intuicjonizmie – opiera się na pierwotnej intuicji liczby naturalnej, a związek tej z kolei ze światem zewnętrznym jest niejasny. Kwestia zatem stosowalności i adekwatności matematyki w stosunku do świata rzeczywistego pozostaje zupełnie niewyjaśniona. Logicyzm i formalizm w ogóle nie zajmowały się tą kwestią, gdyż ich celem było zbudowanie solidnych podstaw dla matematyki (zbudowanej na gruncie teorii mnogości) jako takiej poprzez zredukowanie jej do czegoś prostszego i pewniejszego, na przykład do logiki (w logicyzmie) czy do matematyki finitystycznej, opartej na jasnym i bezpośrednim oglądzie w stylu Kantowskim (w formalizmie).

Z przedstawionych wyżej rozważań wynika, że odpowiedź na pytanie o to, dlaczego matematyka pozwala rozumieć i opisywać świat, winna w istocie brzmieć: NIE WIEMY. Niektórzy mówią tu więc o „niepojętej skuteczności matematyki w naukach przyrodniczych” (*the unreasonable*

²³ Por. H. Field, *Science Without Numbers: The Defence of Nominalism*, Princeton University Press, Princeton 1980; wyd. II rozszerz.: Oxford University Press, Oxford 2016.

²⁴ W. Heisenberg, *Der Teil und das Ganze – Gespräche im Umkreis der Atomphysik*, R. Piper & Co. Verlag, München 1969, s. 92.

effectiveness of mathematics in the natural science) – tak twierdzi w szczególności Eugen P. Wigner (1902–1995), często cytowany fizyk i laureat Nagrody Nobla (1963) w dziedzinie fizyki za wkład do teorii jądra atomowego i cząstek elementarnych oraz za odkrycie podstawowych zasad symetrii unitarnej. Píše on, że „niezwykła użyteczność matematyki w naukach przyrodniczych jest czymś graniczącym z tajemnicą, [...] nie ma żadnego racjonalnego wyjaśnienia tego faktu”²⁵. Dostrzegając – jak to określa – dwa cuda praw fizyki, tzn. istnienie praw przyrody i zdolność umysłu ludzkiego do odgadywania ich – dochodzi do następującego wniosku:

Cud odpowiedności języka matematyki do wyrażania praw fizyki jest niezwykłym darem, którego nie rozumiemy i na który nie zasługujemy. Powinniśmy być za niego wdzięczni i mieć nadzieję, że pozostanie on w mocy [także] w przyszłych badaniach i rozszerzy się – na lepsze lub gorsze, dla naszej przyjemności, a być może też ku naszej konfuzji – na inne gałęzie wiedzy²⁶.

Wedle Eugena P. Wignera matematyce nie przysługuje żadna treść, matematyka jest jedynie „zabawą formalną”. Matematyk nie posiada w istocie żadnej wiedzy, a jedynie pewne szczególne umiejętności zręcznego operowania pojęciami.

Zauważmy, że choć Wigner mówi w swoim artykule o skuteczności matematyki w naukach przyrodniczych, to w istocie chodzi mu głównie o nauki takie, jak: fizyka, chemia czy astronomia. Okazuje się bowiem, że matematyka jest mniej skuteczna, czy wręcz nieskuteczna, na przykład w biologii, naukach społecznych czy humanistycznych. Z czego to wynika? Być może ze złożoności struktury układów badanych przez te nauki. A może nie stworzono jeszcze odpowiednich teorii matematycznych?

Nie wiemy zatem, na czym polega i jakie ma źródło stosowalność matematyki do świata rzeczywistego. Potwierdza się więc teza Leszka Kołakowskiego, który powiedział kiedyś, że filozofowie potrafią pytać, a nie dawać przekonujące odpowiedzi. Poprzestańmy zatem na pięknym *adagium* pochodzącym od polskiego matematyka Hugona Steinhausa (1887–1972), który zresztą bardzo cenił matematykę stosowaną i z powo-

²⁵ Dz. cyt.

²⁶ Dz. cyt.

dzeniem zajmował się zastosowaniami matematyki. Wypowiedział on zdanie (wryte zresztą na jego nagrobku):

Między duchem a materią pośredniczy matematyka.

Amerykański architekt Claude Fayette Bragdon (1866–1946) powiedział zaś:

Matematyka to pismo wryte w ludzkiej świadomości przez samego Ducha Życia²⁷.

Czy to, że nie mamy rozstrzygających odpowiedzi na nasze pytania, powinno nas martwić? Pewnie tak. I powinno stymulować do dalszych poszukiwań. Pamiętajmy jednak, że postęp w filozofii polega nie tylko na udzielaniu odpowiedzi na pytania filozoficzne, lecz także na doskonaleniu aparatury pojęciowej, w której wyraża się tezy filozoficzne, i na eliminacji błędnych rozwiązań. Albert Einstein powiedział zaś kiedyś:

Najpiękniejszą i najgłębszą rzeczą, jaką człowiek może przeżyć, jest uczucie tajemniczości/tajemniczego²⁸.

²⁷ „Mathematics is the handwriting on the human consciousness of the very Spirit of Life itself” – C.F. Bragdon, *Architecture and Democracy*, s. 61.

²⁸ „Das Schönste und Tiefste, das der Mensch erleben kann, ist das Gefühl des Geheimnisvollen” – A. Einstein, *Mein Glaubensbekenntnis* (1932), [http:// www.einsteinwebsite.de/z_biography/glaubensbekenntnis.html](http://www.einsteinwebsite.de/z_biography/glaubensbekenntnis.html).

CZY POWINNA NAS DZIWIĆ MATEMATYCZNOŚĆ ŚWIATA?

Ks. JERZY DADACZYŃSKI

Wydział Filozoficzny
Uniwersytetu Papieskiego Jana Pawła II w Krakowie

Tekst niniejszy stanowi nieznaczne rozszerzenie wykładu wygłoszonego podczas Konferencji w Poznaniu. Zakres samego wystąpienia konferencyjnego został istotnie zmieniony (ograniczony) po wystąpieniu prof. Romana Murawskiego, który w sposób wyczerpujący i syntetyczny omówił kwestię matematyczności świata z punktu widzenia poszczególnych szkół filozofii matematyki, co miało być również celem wystąpienia autora niniejszego artykułu. Dlatego prezentowany tekst dziedziczy zmianę dokonaną w wystąpieniu i jest rozumiany jako pewne dopowiedzenie do artykułu prof. Romana Murawskiego, który ukazuje się w tym samym tomie. Stąd celowo nie są w nim podejmowane pewne kwestie sygnalizowane w tekście prof. Murawskiego. Stąd też – w oczywisty sposób – nie może on aspirować do miana syntetycznej i wyczerpującej prezentacji kwestii matematyczności przyrody. Eksponowane są natomiast w niniejszym tekście pewne zagadnienia, które niezbyt często pojawiają się w dyskusji fenomenu matematyczności świata¹.

Wystarczy tu chociażby wskazać filozofię pitagorejczyków, którzy zauważyli, systematycznie podjęli i przedstawili pierwsze rozwiązanie kwestii matematyczności świata. Poruszona zostanie również sprawa rachunku różniczkowego i całkowego Newtona i Leibniza. Ich *calculus*

¹ Matematyczność świata rozumie się tutaj jako jego cechę, natomiast matematyzowalność świata jako możliwość opisywania (tłumaczenia) go w języku matematyki.

z jednej strony uchodzi za paradygmat fragmentu języka matematyki, który pozwolił opisać istotne aspekty świata, z drugiej jednak – i na to zwrócono uwagę – nie spełniał u swych początków starożytnych standardów teorii matematycznej i zyskał je dopiero w XIX wieku dzięki pracom Bernharda Bolzana, Augustina Cauchy’ego i Karla Weierstrassa, a więc ponad półtora wieku po wejściu w życie zasad nowożytnej fizyki. I wreszcie przypomniana jest starożytna teoria astronomiczna Ptolemeusza, zmatematyzowana, dająca dobre przewidywania, która ostatecznie – z fizycznego punktu widzenia – okazała się być fałszywa. Może to być pewna przestroga dla fascynacji powszechną stosowalnością języka matematyki w opisie świata. W każdym razie wskazuje na to, że sam fakt skutecznej stosowalności matematyki w teorii przyrodniczej nie musi być jeszcze gwarantem poprawności samej teorii.

Jeśli chodzi o tytułowe pytanie, to zadaniem niniejszego tekstu jest pokazanie, że odpowiedź na nie jest funkcją przyjmowanej filozofii matematyki, a dokładniej jej ontologii. Przy czym poszczególne koncepcje ontologii matematyki same podlegają ocenom, które determinują wartość rozwiązań problemu matematyczności świata.

SZKOŁA PITAGOREJSKA

Zasadniczym fundamentem filozofii pitagorejczyków była matematyka, przede wszystkim arytmetyka. Uprawiali oni matematykę jako naukę w tym znaczeniu, że dowodzili twierdzeń, co zapoczątkowane zostało właśnie w starożytnej Grecji. Znali oni pewną grupę twierdzeń dotyczących liczb naturalnych, zajmowali się już dzielnikami tych liczb i w konsekwencji znane im było pojęcie liczb pierwszych. Znali też liczby wymierne (dodatnie), i potrafili w ich dziedzinie wskazać działania, co było znacznym postępem w stosunku do matematyki babilońskiej, w ramach której wprowadzono wyłącznie ułamki o mianowniku 60 oraz o mianowniku równym kwadratowi tej wartości. Pitagorejczycy zdawali sobie sprawę z kongruencji w dziedzinie liczb wymiernych i z tego, iż poszczególne, wyróżnione przy jej pomocy, klasy liczb wymiernych mogły być reprezentowane przez jeden, należący do danej klasy, ułamek.

Co istotne dla prowadzonych rozważań, pitagorejczycy odkryli, iż pewne relacje w świecie zewnętrznym można opisywać przy pomocy

stosunków liczb naturalnych (ułamków). To spostrzeżenie z zakresu akustyki uogólnili na cały świat fizyczny. Dysponując odpowiednią matematyką (arytmetyką), twierdzili nie tylko, że świat da się opisać przy pomocy liczb naturalnych i ich stosunków (świat jest matematyzowalny), ale uważali wręcz, że świat jest matematyczny i to w sposób skrajny – podstawowym „budulcem” świata są liczby.

Z tekstów Arystotelesa wynika, że za jego czasów ścierały się dwie interpretacje „arytmetycznej” ontologii świata pitagorejczyków: formalna i materialna. Pierwsza, „popularniejsza,” mówiła, że liczby to czynnik „formalny” świata, druga stwierdzała, że liczby są wręcz czynnikiem „materialnym” świata².

W każdym razie pitagorejczycy stanowili pierwszą szkołę filozoficzną, która sformułowała tezę o matematyczności świata. Możliwość zbudowania tego poglądu wynikała z dwu przynajmniej przesłanek. Po pierwsze, pitagorejczycy dysponowali odpowiednio rozbudowaną – jak się wówczas wydawało – arytmetyką: liczb naturalnych i ich stosunków (arytmetyką liczb wymiernych dodatnich). Po wtóre, jako wczesna formacja filozofii greckiej poszukiwali oni *arche*, pierwiastka, z którego jest zbudowany świat. Po serii naturalistycznych rozwiązań tej kwestii: ziemia, woda, powietrze, ogień, zaprezentowali bardziej wyrafinowane rozwiązanie tego problemu. Według pitagorejczyków poszukiwane *arche* to liczby (rozumiane jako mnożość jednostek).

Koncepcja pitagorejczyków bardzo szybko legła w gruzach. Powodem było odkrycie – dokonane w ich własnym środowisku – niewymierności. Okazało się, że stosunek dwóch odcinków nie zawsze może być ujmowany jako stosunek dwóch liczb naturalnych. To automatycznie było aplikowalne w świat fizyczny: stosunek dwóch przebytych dróg – np. przekątnej kwadratu o boku jednostkowym oraz samego boku „naskicowanych” na jakimś placu w Wielkiej Grecji – nie był wyrażalny jako stosunek dwóch liczb naturalnych. Znana pitagorejczykom matematyka okazała się jednak za „słaba”, by przy jej pomocy matematyzować rzeczywistość fizyczną. Tym bardziej twierdzić, że jest ona „zbudowana” z matematycznego *arche*.

W konsekwencji odkrycie niewymierności prowadziło do obalenia pitagorejskiej filozofii, a konkretnie do obalenia pitagorejskiej ontologii. Niemniej szkoła z Wielkiej Grecji zbudowała pierwszą historycznie

² Por. W. Tatarkiewicz, *Historia filozofii*, t. 1, PWN, Warszawa 1988, s. 44.

koncepcję próbującą tłumaczyć matematyczność świata. Zresztą samo dostrzeżenie pewnych związków o charakterze matematycznym w świecie fizycznym i teoretyczne rozszerzenie tego spostrzeżenia na większość aspektów świata fizycznego oraz konsekwentnie wyartykułowanie tezy o matematyczności świata też należy do osiągnięć szkoły pitagorejskiej.

PLATON

Stwierdzona przez pitagorejczyków matematyczność świata stonkowo szybko znalazła nowe uzasadnienia w dwóch wielkich koncepcjach filozoficznych powstałych w starożytnej Grecji: w systemach Platona i Arystotelesa.

Według Platona „prawdziwą” rzeczywistością jest świat idei: obiektów pozaczasowych i pozaprzestrzennych. Świat fizyczny jest ich „ciemniem”, niedoskonałym odwzorowaniem. Człowiek ma dostęp poznawczy do idei na drodze anamnezy, jego dusza istniała przed wejściem w świat materialny w świecie idei, dlatego człowiek „przypomina” sobie idee. Jednocześnie postrzega „ślady” idei w świecie fizycznym, który jest niedoskonałym odwzorowaniem świata idei.

Co istotne, Platon stwierdza, że obiekty opisywane przez matematykę są ideami. A jeśli tak, to jak inne idee są odzwierciedlane w świecie fizycznym. Dlatego też świat fizyczny jest matematyczny.

ARYSTOTELES

Arystoteles, który nie akceptował rozbudowanej ontologii Platona, przede wszystkim zaś istnienia obiektów pozaprzestrzennych i pozaczasowych, zbudował, w opozycji do swojego poprzednika, ontologię hylemorficzną. Twierdził on, że istnieją jedynie obiekty czasowe i przestrzenne. Wszystkie one zbudowane są z materii i formy. W pewnym sensie formy obiektów zastępowały idee Platona. Inaczej niż u Platona nie tworzyły one własnego świata. Formy przedmiotów zawsze były związane z materią, z którą konstituowały konkretne obiekty. Formy posiadały „składowe” matematyczne, np. geometryczne: koło, kwa-

drat, elipsa, odcinek itd., lub arytmetyczne: długość obiektu, liczność elementów, z których dany obiekt był złożony. Poznanie owych matematycznych „składowych” form dokonywało się najpierw na drodze empirycznej, jak poznanie przedmiotów konkretnych. Drugim etapem była rozumowa „izolacja” owych form z ich matematycznymi „składowymi”. Mówi się również w tym wypadku o procesie „abstrakcji”, a nawet idealizacji.

Kwestia matematyczności świata fizycznego jest rozwiązana w systemie Stagiryty bardzo prosto. Rzeczywistość fizyczna jest matematyczna, ponieważ każdy obiekt oprócz materii posiada formę, ta zaś zawiera „składowe” matematyczne.

CALCULUS NEWTONA I LEIBNIZA

Powstanie rachunku różniczkowego i całkowego w XVII i XVIII wieku oznaczało – jak się uważa – powstanie najistotniejszego, klasycznego narzędzia matematycznego stosowanego w opisie świata. To był moment przełomowy w procesie matematyzacji rzeczywistości. Powstanie rachunku jest nieodłącznie związane z narodzinami i błyskawicznym rozwojem fizyki Newtonowskiej.

Trzeba jednak w tym miejscu postawić pytanie: czy *calculus* spełniał wymogi stawiane teoriom matematycznym? Odpowiedź na to pytanie jest istotna, gdyby bowiem wymóg matematyczności rachunku nie był spełniony, to powstaje problem, czy fizyka XVII i XVIII wieku posługiwała się teorią matematyczną *sensu stricto* w opisie świata.

Trudno, rzecz jasna, oceniać matematyczność rachunku różniczkowego w XVII i XVIII wieku, przykładając do niego dzisiejsze wymogi metodologii matematyki. Można jednak zastosować w tym miejscu kryteria nałożone na matematykę w starożytności – wypracowane przez Arystotelesa i zastosowane przez Euklidesa w I księdze *Elementów*.

Calculus Isaaca Newtona i Gottfrieda Leibniza nie jest podany w wersji aksjomatycznej. Ten ideał greckiej matematyki został jednak zrealizowany tylko w planimetrii Euklidesa i – poza matematyką – w sylogistyce Arystotelesa. Inne dziedziny matematyki były podane metodą nieaksjomatyczną, a powszechny wymóg aksjomatyzacji zaczęto realizować poza geometrią dopiero pod koniec XIX (arytmetyka Richarda

Dedekinda i Giuseppe Peana oraz wcześniejsze próby Hermanna Grassmanna) i na początku XX wieku. Odnoszenie zatem kryterium aksjomatyzacji do początków rachunku różniczkowego i całkowego jest nieadekwatne.

Natomiast logiczne kryterium Arystotelesa – niesprzeczności nauki – nie było spełniane przez rachunek Newtona i Leibniza³. Na przykład fluksje i fluenty Newtona bywały – w ramach jednego rozumowania – traktowane równocześnie jako spełniające i niespełniające aksjomatu Eudoksosa-Archimedesesa. Ich jednoczesna archimedesowość i niearchimedesowość były wyrazem sprzeczności tkwiących w ówczesnych podstawach rachunku różniczkowego i całkowego.

Innymi mankamentem rachunku był – w niektórych jego obszarach – jego mechaniczny i geometryczny charakter. Ta ostatnia cecha wiązała się z istotną dla całego ówczesnego rachunku nieanalitycznością⁴.

Mechaniczny charakter rachunku przejawiał się w tym, że funkcje rozważano często jako fizyczny ruch, a zasadnicze pojęcia analizy podawano w jego kategoriach, np. zamiast o pochodnej funkcji mówiono o prędkości chwilowej. Tam gdzie nie wypracowano jeszcze odpowiednich wyrażań analitycznych posługiwano się „metaforami” czy „ogłędem” wziętymi z geometrii. Tak „dowodzono” twierdzeń o zerowaniu funkcji ciągłej z wartościami dodatnią i ujemną na końcach rozpatrywanego przedziału i konsekwentnie, fundamentalnego dla analizy twierdzenia o wartości pośredniej funkcji ciągłej. W ten sposób odwoływano się do metod niedozwolonych już w dowodzeniu twierdzeń planimetrii Euklidesa. W omawianych przypadkach dowód analityczny był niemożliwy, ponieważ do początku XIX wieku nie dysponowano analityczną definicją ciągłości funkcji w punkcie. Oczywiście brakiem rachunku

³ Por. G.W. Leibniz, *Tentamen de motuum coelestium causis*, Acta Eruditorum 1669, w: G.W. Leibniz, *Mathematische Schriften*, Bd. 5, Hrsg. C. Gerhardt, Olms, Hildesheim 1971 (Reprint d. Ausgabe Halle 1858), s. 320–328; G.W. Leibniz, *Isbrannuje otryski iz matematyckeskich soczinienij*, pieriev. A.P. Juszkiewicz, Akademia Nauk SSSR, Moskwa 1948, s. 189.

⁴ Tym tendencjom wyraźnie sprzeciwiał się Leonhard Euler. Znalazło to wyraz w trzech jego podręcznikach: L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, vol. 1–2, Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, Lausannae 1748; L. Euler, *Institutiones calculi differentialis*, vol. 1–2, Academia Imperialis Scientiarum, Petropoli 1755; L. Euler, *Institutiones calculi integralis*, vol. 1–3, Academia Imperialis Scientiarum, Petropoli 1768–1770.

z XVIII wieku był też brak ściśle ufundowanej arytmetyki liczb rzeczywistych.

Można więc zasadnie twierdzić, że *calculus* w XVIII wieku nie spełniał kryteriów nałożonych na matematykę przez Arystotelesa i Euklidesa. Tym bardziej, rzecz jasna, nie spełnia dzisiejszych kryteriów matematyczności teorii.

Czy zatem posługiwanie się rachunkiem Newtona i Leibniza w opisie świata mogło być w XVIII wieku traktowane jako matematyzacja świata? Nie miał co do tego wątpliwości Kant, stawiając w 1781 roku pytanie o to, jak możliwe jest matematyczne przyrodoznawstwo. Założeniem tego pytania była akceptacja tezy, że (newtonowskie) przyrodoznawstwo jest matematyczne. Jednak – jak pokazano – przyłożenie do rachunku w jego XVIII-wiecznej postaci kryteriów wypracowanych w starożytności dyskwalifikowało *calculus* jako teorię matematyczną. Z drugiej strony trzeba stwierdzić, że *calculus* powstawał prawie równocześnie z fizyką Newtona i był na jej potrzeby, w dużej mierze, rozwijany. Nie był jeszcze wtedy teorią matematyczną *sensu stricto*, jednak do połowy XIX wieku udało się go tak ufundować, by spełniał kryteria nakładane na matematykę.

To przede wszystkim zasługa Bolzana, który oparł *calculus* na arytmetyce liczb rzeczywistych i wyeliminował w ten sposób wielkości niearchimedesowe i sprzeczności z jego podstaw, uczynił go w pełni analitycznym, odrzucając bezwzględnie odwołania do „oglądu” geometrycznego i mechanicznego w dowodzeniu twierdzeń oraz zdefiniował analitycznie pojęcie ciągłości funkcji w punkcie i wiele innych ważnych pojęć rachunku Newtona i Leibniza⁵. Prace Bolzana z początku XIX wieku zostały dopełnione pracami Cauchy’ego i Weierstrassa.

W każdym razie *calculus*, najważniejsze narzędzie matematycznego opisu świata, stanowi mocny przykład, że „matematyczna” teoria ujmująca ważne aspekty świata wcale u swych początków, mimo zasadniczych sukcesów jej zastosowań w opisie świata, nie musi być matematyczną *sensu stricto*.

⁵ B. Bolzano, *Der binomische Lehrsatz*, Prag 1816, Reprint w: B. Bolzano, *Early Mathematical Works*, Institute of Czechoslovak and General History CSAS, Prague 1981, s. 253–415; B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis*, Prag 1817, Reprint w: B. Bolzano, *Early Mathematical Works*, Institute of Czechoslovak and General History CSAS, Prague 1981, s. 417–467.

Trzeba też stwierdzić, że o ile przedstawiciele matematyków i fizyków byli zafascynowani możliwościami zastosowań rachunku Newtona i Leibniza, to opozycja wobec niego tworzyła się w niektórych kręgach filozoficznych. Przede wszystkim brytyjscy empiryści krytykowali *calculus* Newtona i Leibniza oraz budowaną przy jego pomocy fizykę.

George Berkeley zaatakował rachunek, wykorzystując wprowadzone przez siebie kryterium istnienia:

x istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy x jest postrzegane.

Twierdził on, że wielkości nieskończenie małych nikt nie jest w stanie postrzec, konsekwentnie zatem nie istnieją wielkości, na których *calculus* był zbudowany i dlatego sam rachunek nie ma żadnego sensu⁶.

Poza tym Berkeley z Davidem Hume'em przeprowadzili krytykę dwóch kategorii, bez których fizyka ich czasów nie mogła się obejść: substancji i przyczyny. Najpierw Berkeley odrzucił istnienie substancji materialnych, zaś potem Hume odrzucił istnienie wszelkich substancji, a ponadto podważył kategorię przyczyny.

IMMANUEL KANT

W takiej sytuacji problemowej powstawała *Krytyka czystego rozumu* (1781) Kanta. Filozof z Królewca, wbrew krytyce empirystów i zgodnie z rzeczywistością, przyjął istnienie przyrodoznawstwa opartego na rachunku Newtona i Leibniza. Jednak wobec filozoficznej krytyki pozostawił zasadnicze pytanie: jak to matematyczne przyrodoznawstwo jest możliwe? Odpowiedź na nie jest istotnym elementem *Krytyki*.

Według filozofa z Królewca czas i przestrzeń nie są – jak u Newtona – „zbiornikami”, w których „zanurzony” jest świat fizyczny. Są one apriorycznymi formami naoczności podmiotu (u Kanta: transcendentalnego). Jeśli owe formy naoczności wolne są od bodźców zewnętrznych, to w nich – w czystej naoczności – podmiot konstruuje obiekty matematyki. Obiekty arytmetyki konstruowane są z apriorycznej formy czasu, natomiast obiekty geometrii są konstruowane z apriorycznej formy

⁶ G. Berkeley, *The Analyst*, Tonson, London 1734.

przestrzeni. Podmiot dokonuje konstrukcji, odwołując się do apriorycznych pojęć przedmiotów matematycznych. Opierając się na konstrukcji danego przedmiotu matematyki, podmiot formułuje twierdzenia dotyczące owego przedmiotu i ich dowodzi.

Świat jest również konstrukcją podmiotu. Kiedy bodźce zewnętrzne (ich „źródło” – rzeczy same w sobie pozostają niepoznawalne) docierają do podmiotu, nakładane są na nie aprioryczne formy naoczności podmiotu: czas i przestrzeń. W ten sposób podmiot konstruuje fenomeny. Kiedy dalej podmiot nakłada na zbiory fenomenów dwanaście kolejnych apriorycznych kategorii, przede wszystkim zaś kategorie przyczyny i substancji, to konstruuje on świat.

Jest on z konieczności matematyczny. Fenomeny bowiem, z których jest zbudowany, powstają – należy przypomnieć – przez nałożenie na wrażenia czasu i przestrzeni, a więc apriorycznych „źródeł” matematyki czystej. Podmiot transcendentálny, konstruując świat, nadaje mu w owej podwójnej konstrukcji matematyczny charakter.

Należy też w tym miejscu zauważyć, że naszkicowane koncepcje rozwiązania problemu matematyczności świata pitagorejczyków, Platona, Arystotelesa i Kanta, wskazują bardzo wyraźnie, że są one ostatecznie zdeterminowane akceptowanymi w nich ontologiami matematyki.

UNIFIKACJA MATEMATYKI

Aby pokazać współczesne stanowiska w zakresie ontologii matematyki i generowane przez nie rozwiązania problemu matematyczności świata, posiadające zresztą swe korzenie w tradycyjnych, już zarysowanych koncepcjach, trzeba odwołać się do dwóch procesów w dziejach matematyki:

1. Systematyzacji (unifikacji) matematyki XIX-wiecznej na bazie arytmetyki liczb naturalnych, a potem na bazie cantorowskiej teorii mnogości;
2. Uświadomienia zasadniczego podziału na syntaksę (język) i semantykę matematyki.

Systematyzacja matematyki to próba utworzenia z niej jednej „budowli”, w której, mówiąc językiem „dzisiejszym”, znajduje się modele pewnych teorii matematycznych w innych teoriach, powiązana czasami ze wska-

zaniem teorii „podstawowej”, do której wszystkie inne teorie mogą być sprowadzone.

Systematyzacja matematyki w XIX wieku przebiegała w kilku etapach. Bolzanowi, Cauchy'emu i Weierstrassowi udało się ugruntować analizę matematyczną na arytmetyce liczb rzeczywistych. Weierstrass w swoich wykładach w latach 60. oraz Georg Cantor i Dedekind w latach 70. rozwiązyali problem niewymierności i zbudowali arytmetykę liczb rzeczywistych na bazie arytmetyki liczb wymiernych. Znalezienie modelu arytmetyki liczb wymiernych w arytmetyce liczb całkowitych i tej ostatniej w arytmetyce liczb naturalnych nie przedstawiało żadnego problemu.

W swej pracy *Grundlagen der Geometrie* z 1899 roku David Hilbert posunął jeszcze dalej prace nad systematyzacją matematyki w XIX wieku. Wskazał on, że geometrie nieeuklidesowe, zbudowane w tymże wieku, posiadają modele w geometrii euklidesowej. W istocie Hilbert zebrał w całość dokonania Bernharda Riemanna, Felixa Kleina i Henry Poincarégo, którzy dla poszczególnych geometrii nieeuklidesowych wskazali takie modele. Hilbert poszedł jednak jeszcze dalej i wskazał, że dzięki pomysłowi Kartezjusza (geometria analityczna) nie tylko geometria euklidesowa, ale również geometrie nieeuklidesowe, w tym geometria Giuseppe Veronesego – „przez” geometrię euklidesową – posiadają modele w arytmetyce liczb rzeczywistych. Wobec ostatecznego oparcia arytmetyki liczb rzeczywistych na arytmetyce liczb naturalnych oznaczało to również włączenie geometrii do zbioru dyscyplin matematycznych redukowalnych do arytmetyki liczb naturalnych.

Ta ostatnia otrzymała swoją aksjomatykę dzięki Dedekindowi w roku 1888 i Peanowi w roku 1889. Powstało jednak pytanie: czy i na jakiej dyscyplinie bardziej podstawowej można oprzeć arytmetykę liczb naturalnych? Cantor twierdził, że na zbudowanej przez niego teorii mnogości, Gottlob Frege zaś, że na logice, jednak z wkomponowanym w nią pojęciem klasy (zbioru). Ten proces teoriomnogizacji matematyki prze-rwało odkrycie antynomii w ramach teorii mnogości. Zostały one jednak wyeliminowane przez nadanie teorii Cantora aksjomatyki Ernsta Zermela oraz, alternatywnie, przez wprowadzenie teorii typów przez Bertranda Russella. W ten sposób matematyka początku XX wieku otrzymała swoją dziedzinę podstawową w teorii mnogości. Redukcja ta została systematycznie przedstawiona w pracach Bourbakistów.

SYNTAKSA I SEMANTYKA MATEMATYKI

Pierwszą intuicję wyróżnienia syntaksy i semantyki matematyki można zauważyć już w *Elementach* Euklidesa. Została tam wprowadzona aksjomatyka, która opisuje starożytną teorię wielkości. Jest ona pojmowana w starożytności jako teoria powszechna (*katolicka*), ponieważ jest realizowana – dziś można by powiedzieć: posiada modele – w dwu podstawowych działach ówczesnej matematyki: geometrii i arytmetyce. Można by zatem pojmować aksjomatykę wielkości jako język, który posiada dwie semantyki – w „świecie” liczb i w „świecie” przedmiotów geometrycznych. Ten sposób dziejowego dochodzenia do jasnego rozróżnienia syntaksy i semantyki matematyki jest kontynuowany w XIX-wiecznej refleksji metageometrycznej związanej z wprowadzeniem geometrii nieeuklidesowych. Dla tych geometrii wskazywane są modele w geometrii euklidesowej. W pewnym sensie traktuje się teorie nieeuklidesowe jako języki, które posiadają swoje modele – semantykę – w klasycznej geometrii.

W fundamentalnym dziele Davida Hilberta *Grundlagen der Geometrie* z roku 1899 istnieje już jasne rozróżnienie na teorię geometryczną – pewien język – który może posiadać różne semantyki⁷. Uczony z Getyngi, w ramach budowania metamatematyki w latach 20. XX wieku, klarownie odróżnia język – sformalizowany – teorii matematycznych od semantyki sformalizowanego języka. Z metamatematycznego punktu widzenia interesuje go wyłącznie badanie samego języka, ale nie odmawia temu językowi semantyki. Nieco później pracami Tarskiego zostaje zwieńczony proces rozpoczęty w ramach metageometrii XIX wieku wyraźnym rozróżnieniem syntaktyki i semantyki teorii matematycznych. Semantyka budowana jest w teorii mnogości.

STANOWISKA W ONTOLOGII MATEMATYKI A PROBLEM MATEMATYCZNOŚCI ŚWIATA

Naszkiecowane powyżej procesy unifikacji matematyki na bazie teorii mnogości oraz klarownego rozróżnienie syntaksy i semantyki matema-

⁷ Por. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Stuttgart 1899, 1968¹⁰, s. 2.

tyki umożliwiły na początku XX wieku systematyczne i uproszczone⁸ podjęcie kwestii ontologii matematyki i – konsekwentnie – związanego z nim problemu matematyczności świata.

Redukcja matematyki do teorii mnogości (Cantor, Frege, Russell, Bourbakiści) pozwala stwierdzić, że – na poziomie syntaktycznym – wszystkie pojęcia matematyki można zdefiniować przy pomocy pojęcia zbioru. Na poziomie semantycznym oznacza to tyle, że zbiory cantorowskie można traktować jako „budulec” zamierzonych semantyk teorii matematycznych. Zatem kwestia ontologii matematyki redukuje się, przy wyraźnym rozróżnieniu syntaksy i semantyki teorii matematycznych i przy przyjęciu opisanej wyżej redukcji, do pytania o status ontologiczny zbiorów cantorowskich. Trzeba jeszcze raz podkreślić, że ontologia matematyki jest ściśle związana, jak wskazują koncepcje pitagorejczyków, Platona, Arystotelesa i Kanta, z propozycjami rozwiązań sprawy matematyczności świata.

Nominalizm odpowiada na pytanie o ontologię matematyki stwierdzeniem, że nie ma żadnych obiektów matematycznych, nie istnieją – na żaden sposób – jakiekolwiek zbiory cantorowskie. Matematycy dysponują jedynie syntaksą matematyki, nie istnieje żadna semantyka języka matematyki. Rzecz jasna należy wtedy wyjaśnić, jak pojmuje się standardową semantykę teorii matematycznych, czyli teorię mnogości. Konsekwentni nominaliści stwierdzają, że ostatecznie modele teoriomnogościowe teorii matematycznych są też niczym innym, jak pewną syntaksą, językiem i niczym więcej.

Nominalizm nie daje żadnego rozwiązania problemu matematyczności przyrody. Nie może „lokować” w przyrodzie żadnych zbiorów ani ich „odzwierciedleń”. Bowiem, według nominalistów, takich obiektów nie ma. Z tego samego powodu nie może być „nakładania” na świat przez podmiot zbiorów przezeń konstruowanych. Zresztą nominalizm nie ma takich ambicji i pozostawia kwestię matematyczności świata jako nierozwiązaną i nierozwiązywalną.

W przypadku realizmu skrajnego następuje faktyczne utożsamienie idei platońskich ze zbiorami. Uczynił to wprost sam twórca teorii mnogo-

⁸ Ostatecznie kwestia ontologii matematyki została sprowadzona wyłącznie do statusu ontologicznego zbiorów cantorowskich. Rozstrzygnięcia tej ostatniej kwestii były w istocie powtórzeniem rozstrzygnięć w ramach średniowiecznego sporu o uniwersalia.

ści Cantor. Kierunek ten, który – jak się często podkreśla – reprezentuje większość twórczych matematyków, rozwiązuje kwestię matematyczności świata w sposób nakreślony przez Platona. Trzeba jednak zauważyć, że ci, którzy są określani jako „realiści” wśród matematyków, nie zawsze w pełni dziedziczą koncepcję greckiego filozofa. Owszem, są tacy, którzy przyjmują zarówno tezę o pozaczasowym i pozaprzestrzennym istnieniu przedmiotów matematycznych, o których mówi syntaksa matematyki, i jednocześnie podtrzymują tezę, że owa pozaprzestrzenna i pozaczasowa rzeczywistość jest w pewien sposób, przynajmniej częściowo, „odwzorowana” w świecie fizycznym. Ale obok tych, którzy przyjmują obydwie powyższe tezy, są i tacy, którzy przyjmują tylko pierwszą tezę, rozwiązującą sprawę semantyki matematyki, ale nie akceptują drugiej. W konsekwencji, mimo iż zaliczani są oni do dominującej wśród czynnych matematyków opcji realistycznej, nie posiadają narzędzi do wytłumaczenia matematyczności przyrody.

Jeśli chodzi o ścisły realizm, który zawiera w sobie rozwiązanie matematyczności przyrody, to natrafia on na zasadnicze trudności. Przede wszystkim realizm skrajny odwołuje się do bardzo rozbudowanej, nienaturalistycznej ontologii. Jest ona niezbędna również do tego, by wytłumaczyć matematyczność świata. Po wtóre, problem sprawia kwestia dostępu poznawczego do rzeczywistości pozaprzestrzennych i pozaczasowych zbiorów. Prezentowana przez Platona koncepcja anamnezy wymagałaby przyjęcia kolejnych mocnych założeń, chociażby z zakresu antropologii. Kurt Gödel starał się rozwiązać kwestię dostępu poznawczego do świata pozaprzestrzennego i pozaczasowego zbiorów, odwołując się do epistemologii Edmunda Husserla. Jednak pomysł Gödla – ostatecznie niezrealizowany przez niego – nie znalazł uznania.

Konkludując, trzeba stwierdzić, że choć ścisły realizm prezentuje rozwiązanie kwestii matematyczności świata, to jednak jest ono obciążone tak mocnymi założeniami, że nie może znaleźć powszechnej akceptacji.

Realizm umiarkowany, którego początek leży w systemie Arystotelesa, w bardzo prosty sposób tłumaczy matematyczność świata. Obiekty matematyczne – w prezentowanym podejściu są to cantorowskie zbiory – abstrahuje się z (kolekcji) przedmiotów materialnych. Możliwość „wydobycia” podstawowego „budulca” matematyki z rzeczywistości fizycznej jest świadectwem matematyczności świata.

Mimo łatwego tłumaczenia matematyczności świata samo stanowisko realizmu umiarkowanego jest trudne do przyjęcia.

Przede wszystkim, teoria mnogości operuje tylko takimi zbiorami, których elementami są wyłącznie zbiory. Takich zbiorów nie sposób abstrahować ze świata fizycznego. Jako pewną próbę rozwiązania tego problemu można by postrzegać zbudowanie przez Zermela w latach 30. XX wieku teorii mnogości z atomami. Jednak, po pierwsze, próba fundowania matematyki na tej teorii byłaby bardzo sztuczna. Po wtóre, nawet gdyby traktować owe atomy jako obiekty fizyczne, to przedstawiony poniżej kontrargument pokazuje, że i tak nie jest to rozwiązanie problemu realizmu umiarkowanego.

Kontrargument oparty jest na spostrzeżeniu Hilberta zawartym w artykule *Über das Unendliche*⁹. Matematyk z Getyngi stwierdza tam, odwołując się faktycznie do OTW Einsteina oraz teorii dotyczących mikroświata, że w świecie fizycznym nie istnieje nieskończoność. Tym bardziej nie można twierdzić, iż ze świata można wyabstrahować zbiory nieskończone. Zaś bez zbiorów nieskończonych nie sposób budować matematykę. Tym samym trudno obronić sam realizm umiarkowany, w ramach którego proponuje się proste rozwiązanie problemu matematyczności przyrody.

Według konceptualizmu, wiążącego się z zasady z różnymi formami konstruktywizmu, zbiory, podstawowy „budulec” matematyki, są konstruowane przez podmioty – niekoniecznie przez podmiot transcendentálny – i w myśli podmiotów bytują. Zbiory są „nakładane” na bodźce zewnętrzne i tak podmioty – po części przynajmniej – konstruują matematyczny świat.

To rozwiązanie idzie po linii konstruktywizmu, typowego dla Kanta. Ma ono tę przewagę nad realizmem umiarkowanym, że tłumaczy chociażby genezę takich zbiorów, których elementami są obiekty нефизyczne. Porównanie konceptualizmu (konstruktywizmu) z realizmem skrajnym pokazuje, że ten pierwszy kierunek nie wymaga zakładania bardzo mocnej ontologii typu platońskiego, która ponadto musiałaby mieć „odzworowanie” w strukturach fizycznych świata, oraz nie wymaga rozwiązania problemu dostępu poznawczego do świata abstrakcyjnych zbiorów.

Oczywiście, konceptualizm i – w konsekwencji – jego rozwiązanie zagadki matematyczności świata posiada też istotne braki.

⁹ D. Hilbert, *Über das Unendliche*., „Mathematische Annalen”, 1926, nr 95, s. 161-190.

Pierwszy z nich, to sprawa nieskończoności: w wypadku wszelkich konstruktywizmów problem konstrukcji – przez podmiot – zbiorów nieskończonych, bez których nie ma matematyki. Trzeba jednak przypomnieć, że obydwie typy realizmu też mają bardzo poważny problem z nieskończonością. Umiarkowany wariant nie jest w stanie oddalić kontrargumentu budowanego na spostrzeżeniu Hilberta. Skrajny wariant realizmu „odsyła” zbiory nieskończone do rzeczywistości pozaczasowej i pozaprzestrzennej, ale nie jest w stanie, jak pokazały chociażby próby Gödla, rozwiązać problemu dostępu poznawczego do tego abstrakcyjnego świata.

Można by też w tym miejscu wspomnieć o próbach czynionych obecnie w ramach kognitywistyki, które mają pokazywać, wbrew zastanym schematom myślowym, możliwość konstruowania przez podmiot obiektów, przede wszystkim zbiorów, nieskończonych¹⁰. Wydaje się jednak, że dotychczasowe dokonania na tym polu nie są w pełni przekonujące.

Drugi zarzut kierowany przeciwko konceptualizmowi mówi, iż podmioty fizyczne – a w konsekwencji nawet podmiot transcendentálny z nich wyabstrahowany – są efektem ewolucji biologicznego „fragmentu” świata. Zatem konstrukcje matematyczne podmiotów są ostatecznie „produktem” matematycznego świata. Rzeczywistość nie jest (staje się) matematyczna, ponieważ podmiot „nakłada” na nią zbudowaną przez siebie matematykę, lecz podmiot pochodzi na drodze ewolucji z matematycznego świata i dlatego jest w stanie „(od)tworzyć” matematykę.

Ostatecznie należy stwierdzić, że filozofia nie dysponuje powszechnie akceptowalnym rozwiązaniem problemu matematyczności świata. Proponowane rozwiązania są funkcją przyjmowanych stanowisk w zakresie ontologii matematyki. Konsekwentnie wszystkie propozycje tłumaczenia problemu dziedziczą istotne wady poszczególnych stanowisk w zakresie ontologii. W świetle przedstawionych analiz najbardziej „naturalne” wydaje się być stanowisko konceptualizmu (konstruktywizmu). Jednak wobec wskazanych braków trzeba stwierdzić, odpowiadając na tytułowe pytanie, że matematyczność świata musi budzić zdziwienie.

¹⁰ Przegląd osiągnięć nauk kognitywnych w kwestii genezy matematyki przedstawiają B. Brożek, M. Hohol, *Umysł matematyczny*, Copernicus Center Press, Kraków 2014.

ZAKOŃCZENIE: TEORIA PTOLEMEUSZA – RODZAJ MEMENTO?

To, że świat fizyczny daje się opisywać i tłumaczyć przy pomocy języka matematyki, jest niezaprzeczalne, mimo że pozostaje zagadką.

Trzeba jednak koniecznie podkreślić, że język matematyki nie jest jedynym narzędziem opisującym świat fizyczny. Można to również robić przy pomocy języka literatury – języka poety lub języka epickiego narratora. Świadczą o tym „pomniki” literatury światowej. Do tego nurtu należą również opisy świata – w tym jego genezy – wyrażone w językach religii. Także dzieci, przy pomocy własnego, często niezrozumiałego dla dorosłych języka opowiadają o tym, co je otacza.

Rzecz jasna, wspomniane języki nie dają możliwości przewidywania zdarzeń, co zazwyczaj charakteryzuje matematyczne ujmowania świata. Nie można jednak zaprzeczyć, że mówią one o innych niż matematyczne, niewątpliwie jednak ważnych aspektach rzeczywistości fizycznej.

Nie należy też mitologizować języka matematyki w tym sensie, że sama możliwość skutecznego zastosowania języka matematyki do opisu jakiegoś fragmentu świata ma stanowić gwarancję prawdziwości takiego opisu. Przy czym przez skuteczne zastosowanie wspomnianego języka rozumie się tutaj możliwość przewidywania przyszłych faktów.

Jako przykład można podać tutaj teorię epicykli i deferentów Ptolemeusza, mającą swe początki w pracach genialnego matematyka starożytności Eudoksosa¹¹. Pozwalała ona w miarę precyzyjnie przewidywać położenie ciał niebieskich. Im więcej wprowadzano epicykli, tym przewidywania były dokładniejsze. Działo się to, rzecz jasna, kosztem ważnej cechy teorii naukowych, jaką jest i ich prostota, ale przewidywania

¹¹ Twierdzi się czasami, że zarówno teoria Ptolemeusza, jak i Kopernika nie są teoriami fizycznymi, ale matematycznymi. Na pewno nie należą one do mechaniki, ponieważ nie występują w nich pojęcia masy i siły. Nie odwołując się do nich, nie potrafią one dać odpowiedzi na pytanie: dlaczego ruchy planet odbywają się po takich, a nie innych torach? Z drugiej jednak strony, będąc tylko matematycznym opisem cyklicznych ruchów planet, dają w miarę trafne przewidywania ich przyszłych położenia. Warto też wspomnieć, że Kopernik mówił – choć nie było to częścią jego teorii – o istnieniu oddziaływania, które później znalazło się w teorii Newtona jako powszechna grawitacja (por. M. Kopernik, *O obrotach. Księga pierwsza*, tłum. M. Brożek, PWN, Warszawa 1953, rozdział IX).

stawały się coraz bardziej precyzyjne. Mikołaj Kopernik zastąpił system geocentryczny systemem heliocentrycznym. W ten sposób otrzymał on teorię o wiele prostszą, mógł znacznie zmniejszyć liczbę epicykli. Rzecz jasna teoria Kopernika wiązała się z przewrotem światopoglądowym, co znacznie opóźniło jej akceptację. Trzeba jednak dodać, że gdyby teoria Ptolemeusza nie była tak precyzyjna w przewidywaniu, to być może teoria Kopernika przyjęta by została nieco wcześniej. Ostatecznie zasadnicza idea Kopernika – wzmocniona badaniami Johannesesa Keplera, zasadami fizyki Newtona oraz rachunkiem Newtona i Leibniza – zastąpiła teorię Ptolemeusza.

Bardzo długo jednak nie potrafiono wytłumaczyć, dlaczego starożytna koncepcja Ptolemeusza, oparta na błędnej wizji świata, dość precyzyjnie opisywała ruchy ciał niebieskich. Odpowiedź znaleziono dopiero w XIX wieku w ramach tzw. analizy fourierowskiej. Okazało się, że dowolną funkcję periodyczną można rozwinąć w szereg Fouriera, sumę funkcji kołowych (trygonometrycznych), dla dowolnej wartości tej funkcji okresowej, oczywiście przy zachowaniu tzw. warunków Dirichleta. Ponieważ ruch takich obiektów, jak planety, obserwowany z Ziemi, jest ruchem okresowym, to daje się on – na mocy wspomnianego rozwinięcia Fouriera – przedstawić przy pomocy składania ruchów kołowych. To zaś było podstawą teorii Ptolemeusza.

Teoria Ptolemeusza wydaje się być rodzajem ostrzeżenia dla wszystkich fascynujących się skutecznością bardzo szerokich współcześnie zastosowań matematyki w badaniach otaczającej człowieka rzeczywistości. Samo skuteczne zastosowanie matematyki nie musi być jeszcze gwarancją poprawnego opisu świata. A ostateczne wytłumaczenie skuteczności wadliwych matematycznych opisów świata może zawierać się w „głębokich” związkach wewnątrzmatematycznych teorii, które stosowane są w procesie pojmowania świata. Płyne stąd wniosek, że poszukiwanie, stwierdzanie tego typu „głębokich” związków i szeroko rozumiane badania „metamatematyczne”, w swym założeniu bardzo „teoretyczne” i pozornie absolutnie niezwiązane z fizyczną, przyrodniczą i społeczną rzeczywistością, mogą mieć pewne znaczenie w regulowaniu opisu i tłumaczenia świata.

NOTY O AUTORACH



PROF. DR HAB. JERZY KACZOROWSKI

Data i miejsce urodzenia: Poznań 1957.

Zatrudnienie:

1. Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, profesor zwyczajny, dziekan Wydziału Matematyki i Informatyki, kierownik Zakładu Algebry i Teorii Liczb.
2. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, profesor zwyczajny.

Przebieg kariery naukowej:

absolwent UAM: 1979

doktorat: 1983,

habilitacja: 1987,

tytuł profesora nauk matematycznych: 1996,

członek korespondent PAN: 2004,

członek rzeczywisty PAN: 2016.

Zainteresowania naukowe: analityczna teoria liczb, autor ponad 100 prac naukowych. Najważniejsze z nich dotyczą ogólnej teorii funkcji typu L, badania struktury klasy Selberga, teorii rozmieszczenia liczb i ideałów pierwszych oraz ilościowej teorii faktoryzacji.

Wyróżnienia (m.in.): Nagrody Ministra (1983, 1986, 1988, 1992), Nagroda Wydziału III PAN (1988, 1992), Nagroda Premiera (2001), Medal Sierpińskiego (2012).

Inne: redaktor naczelny „Acta Arithmetica”, „Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici”. Członek komitetów redakcyjnych „Colloquium Mathematicum”, „Bulletin of the Polish Academy of Sciences” oraz „Commentationes Mathematicae”.



**DR HAB. MAREK WOLF,
PROF. NADZW. UNIwersYTETU KARDYNAŁA
STEFANA WYSZYŃSKIEGO W WARSZAWIE**

Urodził się w 1956 roku, w Nowej Rudzie. Tam uzyskał maturę w 1975 roku. W latach 1975–1978 studiował fizykę teoretyczną na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Wrocławskiego. Tamże w 1982 roku obronił pracę doktorską i w 1993 roku się habilitował. W latach 1991 i 1993 przebywał na kilkumiesięcznych stażach w Center for Polymer Studies na Boston University. Zajmował się różnorodną tematyką: supersymetryczną teorią pola, fizyką matematyczną, fraktalami, chaosem, teorią liczb.

Napisał skrypt *Wykłady z kwantowej teorii pola*. Od 2011 roku pracuje na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym. Szkoła Nauk Ścisłych UKSW. Członek redakcji czasopisma „Computational Methods in Science and Technology”. Ma liczbę Erdösa 2.



PROF. DR HAB. ROMAN MURAWSKI

Urodził się w roku 1949 w Poznaniu. W latach 1967–1972 studiował matematykę na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. W okresie 1977–1979 odbył studia doktoranckie na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, gdzie w roku 1979 uzyskał stopień naukowy doktora nauk matematycznych. W roku 1991 habilitował się na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, uzyskując stopień doktora habilitowanego nauk matematycznych (logika matematyczna). W roku 2001 otrzymał tytuł naukowy profesora nauk humanistycznych (w zakresie filozofii – filozofia matematyki). W latach 1975–1979 studiował teologię na Papieskim Wydziale Teologicznym w Poznaniu, uzyskując w roku 1980 magisterium z teologii (teologia dogmatyczna). W okresie 1982–1985 odbył studia podyplomowe na tym wydziale, otrzymując w roku 1985 licencjat kanoniczny (*licentiatus in sacra teologia*). Od roku 1972 pracuje na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza, obecnie

na stanowisku profesora zwyczajnego, pełniąc (od roku 1996) funkcję kierownika Zakładu Logiki Matematycznej. W latach 2005–2012 był prodziekanem Wydziału Matematyki i Informatyki UAM.

Prowadził badania naukowe na uniwersytetach w Heidelbergu i Erlangen-Nürnberg (w ramach stypendium Fundacji im. Aleksandra von Humboldta) oraz w Hanowerze, Oksfordzie, Brukseli i Amsterdamie.

Był laureatem subsydium profesorskiego Fundacji na rzecz Nauki Polskiej, nagród Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego, Nagrody im. Samuela Dicksteina, przyznanej przez Polskie Towarzystwo Matematyczne, oraz Nagrody Naukowej Miasta Poznania.

Jest członkiem komitetów redakcyjnych wielu czasopism naukowych w Polsce i za granicą. W latach 2003–2007 był członkiem Komitetu Historii Nauki i Techniki PAN, a w okresie 2006–2009 pełnił funkcję prezesa Polskiego Towarzystwa Logiki i Filozofii Nauki.

Zajmuje się naukowo logiką matematyczną i podstawami matematyki oraz filozofią i historią logiki i matematyki. Opublikował 19 książek oraz ponad 200 artykułów naukowych.



KS. DR HAB. JERZY DADACZYŃSKI,
PROF. NADZW. KATEDRA FILOZOFII LOGIKI,
WYDZIAŁ FILOZOFICZNY UPJPII W KRAKOWIE

Ur. 1959 w Siemianowicach Śląskich

1978 – matura w IV LO w Katowicach

1978–1985 – Studia filozoficzno-teologiczne – Wyższe Śląskie Seminarium Duchowne, Kraków/
Katowice

1985 – magisterium z teologii – Wydział Teologiczny,
Papieska Akademia Teologiczna, Kraków

1985 – święcenia kapłańskie – diecezja Katowicka

1986 – licencjat z filozofii – Wydział Filozoficzny, Papieska Akademia Teologiczna, Kraków

1988 – studia doktoranckie – Katolicki Uniwersytet Lubelski, Internationale Akademie für Philosophie im Fürstentum, Liechtenstein, Papieska Akademia Teologiczna, Kraków

1994 – doktorat – Wydział Filozoficzny, Papieska Akademia Teologiczna, Kraków

- 1998/99 – stypendium – Georg-August-Universität, Getynga
- 2008 – habilitacja – Wydział Filozoficzny, Papieska Akademia Teologiczna, Kraków
- 2008 – adiunkt – Wydział Filozoficzny, Papieska Akademia Teologiczna, Kraków
- 2015 – profesor nadzwyczajny Uniwersytetu Papieskiego Jana Pawła II, Kraków

